Lista 10. Cadeias de Markov IV (tempo contínuo). Gabarito.

Solução Exercício 2.

1. Equações backward e forward para processo de Poisson com a taxa λ:

   (a) backward

$$\begin{aligned} p'_{i,i+l}(t) &= \lambda p_{i+1,i+l}(t) - \lambda p_{i,i+l}(t), \quad l \geq 1 \\ p'_{i,i}(t) &= -\lambda p_{i,i}(t). \end{aligned}$$

   (b) forward

$$\begin{aligned} p'_{i,i+l}(t) &= \lambda p_{i,i+l-1}(t) - \lambda p_{i,i+l}(t), \quad l \geq 1 \\ p'_{i,i}(t) &= -\lambda p_{i,i}(t). \end{aligned}$$

2. Equações backward e forward para processo de Nascimento e Morte com taxas (λ_i, μ_i):

   (a) backward

$$p'_{i,j}(t) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{i,j}(t),$$

   (b) forward

$$p'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{i,j}(t),$$

□

Solução Exercício 4.
Processo de morte puro com taxas $(\mu_x), x = 1, 2, \ldots$.

1. Forward equação:

$$\begin{aligned} p'_{x,x-y}(t) &= p_{x,x-y+1}(t)\mu_{x-y+1} - \mu_{x-y} p_{x,x-y}(t), \quad y \geq 1 \\ p'_{x,x}(t) &= -\mu_x p_{x,x}(t). \end{aligned}$$

2. Achar $p_{x,x}(t)$: equação é $p'_{x,x}(t) = -\mu_x p_{x,x}(t)$, solução é $p_{x,x}(t) = e^{-\mu_x t}$

3. Achar $p_{x,x-1}(t)$: equação é

$$p'_{x,x-1}(t) = \mu_x p_{x,x}(t) - \mu_{x-1} p_{x,x-1}(t) = \mu_x e^{-\mu_x t} - \mu_{x-1} p_{x,x-1}(t),$$

   solução é

$$\begin{aligned} p_{x,x-1}(t) &= Ce^{-\mu_{x-1}t} + \int_0^t \mu_x e^{-\mu_x s} e^{-\mu_{x-1}(t-s)} ds \\ &= Ce^{-\mu_{x-1}t} + e^{-\mu_{x-1}t} \int_0^t \mu_x e^{(\mu_{x-1}-\mu_x)s} ds \\ &= Ce^{-\mu_{x-1}t} + \frac{\mu_x}{\mu_{x-1} - \mu_x} e^{-\mu_{x-1}t} \Big(e^{(\mu_{x-1}-\mu_x)t} - 1 \Big) \end{aligned}$$

   usando condição $p_{x,x-1}(0) = 0$ obtemos $C = 0$, assim, lembrando $\mu_x = x\mu$ temos

$$\begin{aligned} p_{x,x-1}(t) &= \frac{\mu_x}{\mu_{x-1} - \mu_x} e^{-\mu_{x-1}t} \Big(e^{(\mu_{x-1}-\mu_x)t} - 1 \Big) \\ &= -xe^{-x\mu t}(1 - e^{\mu t}) \; = \; x(e^{-\mu t})^{x-1}(1 - e^{-\mu t}) \end{aligned}$$

4. Sistema das equações diferenciais ordinais da primeira ordem tem uma única solução. Assim, verificamos se

$$p_{x,x-y}(t) = \binom{x}{x-y} (e^{-\mu t})^{x-y} (1 - e^{-\mu t})^y, 0 \leq y \leq x, \tag{1}$$

   é uma solução. Solução termina verificando se (1) satisfaz forward equação do primeiro item.

□

Solução Exercício 5. Usaremos fórmula para medida estacionaria de processo de nascimento e morte:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_1}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_1}\Big)^{-1},$$

a convergência da serie nesta formula garante que o processo é recorrente, caso contrário é transiente. Em ambos os casos a serie diverge:

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty;$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n(n-1)\cdots 2}{n(n-1)\cdots 1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) = \infty;$$

□