Aula 10. Cadeias de Markov com tempo contínuo II.

Equações diferencias para probabilidades de transição

Para cadeia de Markov homogênea $X(t)$ com tempo contínuo seja $P_{ij}(t) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)$. Provamos que essas probabilidades satisfazem as seguintes equações

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i, \quad \text{and} \quad \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = v_i p_{ij} \;\; \text{quando } i \neq j \tag{1}$$

Equações de Kolmogorov-Chapman

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s) \;\; \text{para quaisquer } s, t \geq 0. \tag{2}$$

Equações de Kolmogorov Backward

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t) \;\; \text{para todos estados } i, j \text{ e tempo } t \geq 0, \tag{3}$$

onde adotamos anotação $q_{ij} = v_i p_{ij}$. Provamos isso:

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - \big(1 - P_{ii}(h)\big) P_{ij}(t).$$

e logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \Big\{ \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \Big[\frac{1 - P_{ii}(h)}{h}\Big] P_{ij}(t) \Big\}$$

o que com (1) prova (3).

Cadeia de Markov com dois estados

Essa cadeia pode ser interpretada em termos de funcionamento de uma maquina. Seja a máquina funciona durante o tempo exponencial com a média $1/\lambda$ depois quebra. O tempo de reparação da maquina tambem pode ser representada como o tempo exponencial mas com a média $1/\mu$. Seja 0 estado que representa o fato que a maquina esta funcionando e 1 maquina quebrada. Acharemos as probabilidades $P_{ij}(t)$ para essa cadeia.

Notamos que para essa cadeia $v_0 = \lambda$, $v_1 = \mu, p_{01} = 1, p_{10} = 1$ e $q_{01} = \lambda, q_{10} = \mu$. Escrevemos as equações (3) para probabilidade $P_{00}(t)$ e $P_{10}(t)$: $P'_{00}(t) = q_{01} P_{10}(t) - v_0 P_{00}(t)$ e $P'_{10}(t) = q_{10} P_{00}(t) - v_1 P_{10}(t)$. O que dà

$$P'_{00}(t) = \lambda P_{10}(t) - \lambda P_{00}(t) \quad \text{e} \quad P'_{10}(t) = \mu P_{00}(t) - \mu P_{10}(t). \tag{4}$$

para resolver (4) notamos que $\mu P'_{00}(t) + \lambda P'_{10}(t) = 0$ o que leva a equação $\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = const$. Agora precizamos de condições iniciais. Supomos que $X(0) = 0$ isso significa que $P_{00}(0) = 1$ e $P_{10}(0) = 0$. Obtemos $const = \mu$

$$\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = \mu \Longrightarrow \lambda P_{10}(t) = \mu(1 - P_{00}(t)) \tag{5}$$

voltando para primeira equação em (4) temos

$$P'_{00}(t) = \mu(1 - P_{00}(t)) - \lambda P_{00}(t) = \mu - (\mu + \lambda) P_{00}(t).$$

para resolver essa equação usaremos a substituição $h(t) = P_{00}(t) - \mu/(\lambda + \mu)$ que satisfaz a equação

$$h'(t) = -(\lambda + \mu) h(t) \quad \Longrightarrow \quad \text{ou} \quad h'(t)/h(t) = -(\lambda + \mu),$$

o que dà a solução $h(t) = Ke^{-(\lambda+\mu)t}$ e $P_{00}(t) = Ke^{-(\lambda+\mu)t} + \mu/(\lambda+\mu)$. Usando condições iniciais $P_{00}(0) = 1$ acharemos K e

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{6}$$

e de (6) obtemos $P_{10}(t)$

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{7}$$

Equações de Kolmogorov Forward

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t) \quad \text{para todos estados } i,j \text{ e tempo } t \geq 0, \tag{8}$$

onde adotamos anotação $q_{ij} = v_i p_{ij}$. Provamos isso:

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - P_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - \big(1 - P_{jj}(h)\big)P_{ij}(t).$$

e logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \Big\{ \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) \frac{P_{kj}(h)}{h} - \Big[\frac{1 - P_{jj}(h)}{h}\Big] P_{ij}(t) \Big\}$$

o que com (1) prova (8). Se podemos trocar soma e limite – isso não é sempre é verdade neste caso.

Probabilidades limites

Em analogia com cadeias de Markov com tempo discreto podemos tentar achar as probabilidades limites p_j

$$P_j := \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) \tag{9}$$

supondo que limite existe e não depende de estado inicial i. Para derivar as equações para probabilidade limite usaremos equações de Kolmogorov forward (a equação backward leva à um caso trivial): se limite (9) existe é natural deduzir que a derivada da probabilidade de transição em parte esquerda da equação de Kolmogorov vai para 0. Assim obtemos seguinte equação (assumindo tambem que podemo trocar limite e soma)

$$0 = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j, \text{ e } \sum_j P_j = 1. \tag{10}$$

1. Assumimos que as probabilidades limites exitem. As condições suficientes para essa existência, por exemplo, são
   (a) todos os estados são comunicaveis: começando de um estado i existe a probabilidade positiva de atingir estado j, para quaisquer $i, j \in S$ e
   (b) cadeia de Markov é positiva recorrente: começando de qualquer estado o tempo médio de retorno neste estado é finito.

   Se essas condições valem, então probabilidades limites existem e satisfazem equações (10). P_j pode ser interpretada como o tempo médio que o processo passa em estado j.

2. Equações (10) tem uma boa interpretação:

$$\begin{aligned} v_j P_j &:= \text{taxa com qual o processo deixa o estado } j \\ \sum_{k\neq j} P_k q_{kj} &:= \text{taxa com qual o processo entra em estado } j \end{aligned}$$

   Assim equação (10) estabeleça a igualdades dessas taxas. Por isso a equação (10) chama-se as verez a equação de balanço.

3. Quando probabilidades limites extem falam que a cadeia é *ergódica*. E as probabilidade (P_j) chamam-se tambem como probabilidades estacionarias.

Exemplo: probabilidades limites para processo de nascimento e morte

Escerevemos a equação de balanço:

Estado	Taxa de saida = taxa de entrada
0	$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1)P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0$
2	$(\lambda_2 + \mu_2)P_2 = \mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1$
$n, n \geq 1$	$(\lambda_n + \mu_n)P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$

somando para cada equação a equação precedente obtemos

$$\begin{cases} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ \lambda_1 P_1 &= \mu_2 P_2 \\ \lambda_2 P_2 &= \mu_3 P_3 \\ &\vdots \\ \lambda_n P_n &= \mu_{n+1} P_{n+1},\ n \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

Solucionando obtemos

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}P_0$$

A condição $\sum_j P_j = 1$ vai achar P_0 :

$$P_0 = \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\Big)^{-1} \Longrightarrow P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\Big)^{-1}. \tag{12}$$

Daqui podemos ver que as condições necessarias para existencia de probabilidades limites é convergencia da serie em (12). Pode ser mostrado que essas condições tambem são suficientes.

Cadeias reversiveis em tempo

Seha $\{X_n\}$ uma cadeia de Markov ergodica com as probabilidades de transição $\{p_{ij}\}$ e distribuição estacionária $\pi = (\pi_i)$. Para dado n consideramos uma sequencia em tempo inverso $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$. Essa sequencia forma uma cadeia de Markov (provar) com as probabilidades de transição q_{ij} definidos como

$$q_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = \frac{P(X_n = j, X_{n+1} = i)}{P(X_{n+1} = i)} = \frac{P(X_n = j)P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)}{P(X_{n+1} = i)} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

Se $q_{ij} = p_{ij}$ então a cadeia de Markov chama-se cadeia *reversivel em tempo.* A condição pode ser descrita naturalmente em seguinte forma de *equações de balanço detalhado*

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \text{ para todos } i, j. \tag{13}$$

Se para dada matriz de transição (p_{ij}) conseguimos achar o vetor (π_i) que satisfaz a equação (13), neste caso esse vetor (π_i) é distribuição estacionária da cadeia. Isso é uma ferramenta comum para achar as distribuições estacionárias.

Para caso de cadeias de Markov com tempo contínuo podemos definir as cadeias reversíveis em tempo em mesmo modo. Agora (P_{ij}) são as probabilidades de transição para cadeia embutida. Supondo que a cadeia embutida é ergódica, existe então (π_i) a distribuição estacionária para essa cadeia. Intuitivamente podemos deduzir que a distribuição estacionária para cadeia com tempo contínuo deve ter a forma seguinte:

$$P_i = \frac{\pi_i/v_i}{\sum_j \pi_j/v_j}. \tag{14}$$

Realmente, P_i vai ser proporcional á π_i número medio de vezes quando a cadeia embutida fica em estado i e vezes tempo médio que a cadeia passa neste estado $1/v_i$. O denominador é um termo que vai renmormalizar, transformar em probabilidades, esses produtos π_i/v_i.

È natural esperar que as condições de reversibilidade da cadeia em caso de tempo contínuo devem ser

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \text{ para todos } i, j. \tag{15}$$

o que é analogo de (13).

Exemplo: processo de nascimento e morte ergódico é processo reversível em tempo

Em caso quando as probabilidades limites (P_j) existem a sistema das equações (11) oferece as equações de balanço detalhado.

Exemplo 6.18, [1]

Supomos que tem n máquinas e um servidos para reparar as máquinas. Cada máquina falha (quebra) i com a taxa λ_i. Se k maquinas estão quebradas, então a maquina i vai ser reparada com a taxa μ_i/k. Estado da cadeia é conjunto de maquinas quebradas. Estão em total 2^n estados. As taxas de transição podem ser descritos agora em seguinte forma

$$q_{(i_1,\dots,i_{k-1}),(i_1,\dots,i_k)} = \lambda_{i_k}, \quad q_{(i_1,\dots,i_k),(i_1,\dots,i_{k-1})} = \mu_{i_k}/k,$$

onde todos os $i_1,\dots,i_k$ são distintos. Equação de balanço detalhado (15) é

$$P_{(i_1,\dots,i_k)}\frac{\mu_{i_k}}{k} = P_{(i_1,\dots,i_{k-1})}\lambda_{i_k}$$

ou

$$P_{(i_1,\dots,i_k)} = \frac{k\lambda_{i_k}}{\mu_{i_k}}P_{(i_1,\dots,i_{k-1})} = \frac{k\lambda_{i_k}}{\mu_{i_k}}\frac{(k-1)\lambda_{i_{k-1}}}{\mu_{i_{k-1}}}P_{(i_1,\dots,i_{k-2})} = \cdots = k!\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{i_j}}{\mu_{i_j}}P(\emptyset)$$

e

$$P(\emptyset) + \sum P_{(i_1,\dots,i_k)} = 1 \Longrightarrow P(\emptyset) = \Big(1 + \sum_{i_1,\dots,i_k} k!\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{i_j}}{\mu_{i_j}}\Big)^{-1}$$

Exercícios domésticos. (Exercicios para Lista: 2, 4, 5.)

1. Provar (2)
2. Escrever as equações de Kolmogorov backward e forward para processo de Poisson com intesidade λ e para o processo de nascimento e morte em geral.
3. Considere um processo de nascimento e morte em três estados: $\{0,1,2\}$, e taxas de nascimento e morte tais que $\lambda_0 = \mu_2$. Use a "forward equation"para determinar $P_{0y}(t)$, $y = 0,1,2$.
4. Considere um processo de morte puro (ou seja, so há nascimentos $\lambda_x = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{N}$) em $\{0,1,2,\cdots\}$.
   (a) Escreva a "forward equation".
   (b) Encontre $P_{xx}(t)$.
   (c) Encontre $P_{x,x-1}(t)$.
   (d) Mostre que, se $\mu_x = x\mu$, para uma constante μ, então:
   $$P_{xy}(t) = \binom{x}{y}(e^{-\mu t})^y(1-e^{-\mu t})^{x-y}, 0 \le y \le x.$$
5. Considere um processo de nascimento e morte nos inteiros não-negativos, com taxas de morte dadas por $\mu_x = x$, $x \ge 0$. Determine quando o processo será transiente, recorrente nulo, ou recorrente positivo, quando as taxas de nascimento forem:
   (a) $\lambda_x = x+1$, $x \ge 0$.
   (b) $\lambda_x = x+2$, $x \ge 0$.
6. Seja $X(t)$ um processo de fila com servidor simples(ou seja, um único servidor). E seja ρ_{0x} é a probabilidade do tempo de sair de 0 e chegar no x ser finito
   (a) Mostre que, se $\mu \ge \lambda > 0$ então $\rho_{x0} = 1$, $x \ge 1$.
   (b) Mostre que, se $\mu < \lambda$, então:
   $$\rho_{x0} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^x, x \ge 1.$$

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 6.