Lista 1 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito

Exercício 1

A distribuição conjunta de duas variáveis discretas X, Y é dada pela seguinte tabela:

X \ Y	-1	0	2
-1	0	1 /6	1 /12
0	1 /6	0	1 /12
1	1 /4	1 /12	1 /6

1. Achar a distribuição de $Z = 2X + Y$.

Solução:

Note que Z pode assumir os seguintes valores, $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$. Portanto podemos calcular a probabilidade de Z assumir cada um dos valores.

$$\mathbb{P}(Z = -3) = \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = 0$$
$$\mathbb{P}(Z = -2) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 2) = 0 + \frac{1}{12}$$
$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6}$$

Portanto a distribuição de Z é da forma:

z	-3	-2	-1	0	1	2	4
$\mathbb{P}(Z = z)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Podemos verificar se o calculo está correto somando a linha de $\mathbb{P}(Z = z)$, cuja soma deve ser igual a 1.

2. Achar as distribuições marginais de X e Y. As variáveis X e Y são independentes?

Solução:

A partir da tabela de distribuição conjunta podemos obter as distribuições marginais de X e Y.

$$\mathbb{P}(X=-1) = \sum_{y\in\{-1,0,2\}} \mathbb{P}(X=-1, Y=y) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$$
$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{y\in\{-1,0,2\}} \mathbb{P}(X=0, Y=y) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \sum_{y\in\{-1,0,2\}} \mathbb{P}(X=1, Y=y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12}$$

Portanto a distribuição marginal de X é da forma:

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x})$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$

Repetindo o mesmo processo para Y:

$$\mathbb{P}(Y=-1) = \sum_{x\in(-1,0,1)} \mathbb{P}(X=x, Y=-1) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$
$$\mathbb{P}(Y=0) = \sum_{x\in(-1,0,1)} \mathbb{P}(X=x, Y=0) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$$
$$\mathbb{P}(Y=2) = \sum_{x\in(-1,0,1)} \mathbb{P}(X=x, Y=1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12}$$

Portanto a distribuição marginal de Y é da forma:

y	-1	0	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

Se X e Y são independentes então vale a seguinte propriedade :

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Contudo note que por exemplo

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12}$$

3. Achar a distribuição de $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Solução:

Por definição temos que :

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x|Y = y)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X|Y = -1)) &= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x|Y = -1) \\
&= \sum_x x \cdot \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = -1)}{\mathbb{P}(Y = -1)} \\
&= (-1) \cdot \frac{0}{\frac{5}{12}} + (0) \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} + (1) \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X|Y = 0)) &= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x|Y = 0) \\
&= \sum_x x \cdot \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} \\
&= (-1) \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{12}} + (0) \cdot \frac{0}{\frac{3}{12}} + (1) \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{12}} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X|Y = 2)) &= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x|Y = 2) \\
&= \sum_x x \cdot \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)} \\
&= (-1) \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{12}} + (0) \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{12}} + (1) \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{12}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

y	-1	0	2
$\mathbb{E}(X\|Y = y)$	$\frac{3}{5}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(\mathbb{E}(X\|Y = y) = .)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

4. Construir distribuição condicional de X dado $Y = 2$

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=-1|Y=2) &= \frac{\mathbb{P}(X=-1,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(X=0|Y=2) &= \frac{\mathbb{P}(X=0,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(X=1|Y=2) &= \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{12}} = \frac{2}{4}
\end{aligned}$$

$X\|Y=2$	-1	0	1
$\mathbb{P}(X\|Y=2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

5. Achar distribuição de $\mathbb{V}ar(X|Y)$

Solução:

Por definição temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X|Y=y) &= \mathbb{E}(X^2|Y=y) - (\mathbb{E}(X|Y=y))^2 \\
\mathbb{V}ar(X|Y=-1) &= \left((-1)^2\cdot\frac{0}{\frac{5}{12}} + (0)^2\cdot\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} + (1)^2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{6}{25} \\
\mathbb{V}ar(X|Y=0) &= \left((-1)^2\cdot\frac{2}{3} + (0)^2\cdot 0 + (1)^2\cdot\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \\
\mathbb{V}ar(X|Y=2) &= \left((-1)^2\cdot\frac{1}{4} + (0)^2\cdot\frac{1}{4} + (1)^2\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

Então:

$\mathbb{V}ar(X\|Y)$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{11}{16}$
$\mathbb{P}\ (\mathbb{V}ar(X\|Y) = .)$	$\frac{5}{12}$	-$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

Exercício 2

([1], Capítulo 3) X_1, X_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas seguindo a distribuição geométrica, $X_i \sim Geom(p), i = 1, 2$. Achar $\mathbb{P}(X_1 = k|X_1 + X_2 = n)$.

Solução:

Temos que $X_i \sim Geom(p), i = 1, 2$, independentes.
Considerando que : $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^n \cdot p$

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_2 = n - k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}$$

Temos que

$$\mathbb{P}(X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(X_2 = n - k) = (1-p)^k \cdot p \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$$

calculamos então o denominador.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = n - k | X_2 = k) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (1-p)^{n-k} \cdot p \cdot (1-p)^k \cdot p \\
&= p^2 \cdot (1-p)^n \cdot (n+1)
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{(1-p)^k \cdot p \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p}{p^2 \cdot (1-p)^n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

Exercício 3

([1], Capítulo 3, Exercício 7) Distribuição conjunta $p(x, y, z)$ de variáveis aleatórias X, Y, Z é dada pela seguinte tabela:

$$\begin{aligned}
p(1,1,1) = \frac{1}{8}, \quad p(1,1,1) = \frac{1}{4}, \\
p(1,1,1) = \frac{1}{8}, \quad p(1,1,1) = \frac{3}{16}, \\
p(1,1,1) = \frac{1}{16}, \quad p(1,1,1) = 0, \\
p(1,1,1) = 0, \quad p(1,1,1) = \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

Calcule $\mathbb{E}(X|Y = 2)$ e $\mathbb{E}(X|Y = 2, Z = 1)$.

Solução:

Por definição temos que

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_x x \cdot \left(\sum_z \mathbb{P}(X = x, Z = z | Y = y) \right)$$

Para $X = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_z \mathbb{P}(X=1, Z=z|Y=2) &= (\mathbb{P}(X=1, Z=1|Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Z=2|Y=2)) \\
&= (\frac{\mathbb{P}(X=1, Z=1, Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)} + \frac{\mathbb{P}(X=1, Z=2, Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}) \\
&= (\frac{(\frac{1}{16})}{(\frac{5}{16})} + \frac{0}{(\frac{5}{16})}) \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Para X = 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_z \mathbb{P}(X=2, Z=z|Y=2) &= (\mathbb{P}(X=2, Z=1|Y=2) + \mathbb{P}(X=2, Z=2|Y=2)) \\
&= (\frac{\mathbb{P}(X=2, Z=1, Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)} + \frac{\mathbb{P}(X=2, Z=2, Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}) \\
&= \frac{0}{\frac{5}{16}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Portanto : $\mathbb{E}(X|Y=2) = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|Y=2, Z=1) &= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X=x|Y=2, Z=1) \\
&= 1 \cdot (\frac{\mathbb{P}(X=1, Y=2, Z=1)}{\mathbb{P}(Y=2, Z=1)}) + 2 \cdot (\frac{\mathbb{P}(X=2, Y=2, Z=1)}{\mathbb{P}(Y=2, Z=1)}) \\
&= 1 \cdot \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} + 2 \cdot 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercício 4

Sejam X, Y variáveis aleatórias discretas são independentes. Prove, que neste caso

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \mathbb{E}(X) \text{ , para qualquer } y.$$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|Y=y) &= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X=x|Y=y) \\
&= \sum_x x \cdot \frac{\mathbb{P}(X=x|Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \\
&= \sum_x x \cdot \frac{\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \\
&= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X=x) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}
$$

Note que isso só é verdade quando X e Y são variáveis independentes.

Exercício 5

([1], Capítulo 3, Exercício 28) Em Em modelo de urnas de Polya supomos que inicialmente temos r vermelhas e b azuis bolas. Em cada passo uma bola é escolhida por acaso e depois retorna para urna junto com mais uma bola da mesma cor. Seja X_k número de bolas vermelhas em urna depois de k passos.

Solução:

1. Achar $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n)$

Queremos encontrar o número esperado de bolas vermelhas no turno (n + 1) dado que tinham X_n bolas vermelhas no n-ésimo turno

Considere n o número de bolas adicionadas até o turno n.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) &= X_n \cdot \mathbb{P}(X_{n+1}=X_n|X_n) + (X_n+1)\cdot\mathbb{P}(X_{n+1}=X_n+1|X_n) \\
&= X_n \cdot (1-\frac{X_n}{r+b+n}) + (X_n+1)\cdot(\frac{X_n}{r+b+n}) \\
&= X_n - \frac{X_n^2}{r+b+n} + (X_n+1)\cdot(\frac{X_n}{r+b+n}) \\
&= X_n - \frac{X_n^2}{r+b+n} + \frac{X_n^2}{r+b+n} + (\frac{X_n}{r+b+n}) \\
&= X_n \cdot (1-\frac{1}{r+b+n})
\end{aligned}
$$

2. Usando item anterior achar $\mathbb{E}(X_n)$

Para obter $\mathbb{E}(X_n)$ podemos utlizar indução para mostrar que a esperança é igual a $r \cdot \frac{(r+b+n)}{r+b}$

Base da indução : Para $n=0$, $\mathbb{E}(X_0)$ = r

Hipótese de indução : Para n, $\mathbb{E}(X_n) = r \cdot \frac{(r+b+n)}{r+b}$

Passo de indução : Supondo que vale para n, então para (n+1) temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n)) \\
&= \mathbb{E}(X_n \cdot (1 - \frac{1}{r+b+n})) \\
&= \mathbb{E}(X_n) \cdot (1 - \frac{1}{r+b+n}) \\
&= r \cdot \frac{r+b+n}{r+b} \cdot (\frac{(r+b+n+1)}{r+b+n}) \\
&= r \cdot \frac{(r+b+n+1)}{r+b}
\end{aligned}$$

Como queriamos demonstrar.

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.