

Lista 1. Distribuição Condicional Caso Discreto.

Exercício 1. A distribuição conjunta de duas variáveis discretas X, Y é dada pela seguinte tabela:

$X \setminus Y$	-1	0	2
-1	0	1/6	1/12
0	1/6	0	1/12
1	1/4	1/12	1/6

1. Achar a distribuição de $Z = 2X + Y$.
2. Achar as distribuições marginais de X e Y . As variáveis X e Y são independentes?
3. Achar a distribuição de $\mathbb{E}(X | Y)$.
4. Construir distribuição condicional de X dado $Y = 2$.
5. Achar distribuição de $\text{Var}(X | Y)$.

Exercício 2. ([1], Capítulo 3) X_1, X_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas seguindo a distribuição geométrica, $X_i \sim \text{Geom}(p), i = 1, 2$. Achar $\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$.

Exercício 3. ([1], Capítulo 3, Exercício 7) Distribuição conjunta $p(x, y, z)$ de variáveis aleatórias X, Y, Z é dada pela seguinte tabela:

$$\begin{aligned} p(1, 1, 1) &= \frac{1}{8}, & p(2, 1, 1) &= \frac{1}{4}, \\ p(1, 1, 2) &= \frac{1}{8}, & p(2, 1, 2) &= \frac{3}{16}, \\ p(1, 2, 1) &= \frac{1}{16}, & p(2, 2, 1) &= 0, \\ p(1, 2, 2) &= 0, & p(2, 2, 2) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Calcule $\mathbb{E}(X | Y = 2)$ e $\mathbb{E}(X | Y = 2, Z = 1)$.

Exercício 4. Sejam X, Y variáveis aleatórias discretas são independentes. Prove, que neste caso

$$\mathbb{E}(X | Y = y) = \mathbb{E}(X), \text{ para qualquer } y.$$

Exercício 5. ([1], Capítulo 3, Exercício 28) Em modelo de urnas de Polya supomos que inicialmente temos r vermelhas e b azuis bolas. Em cada passo uma bola é escolhida por acaso e depois retorna para urna junto com mais uma bola da mesma cor. Seja X_k número de bolas vermelhas em urna depois de k passos.

1. Achar $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n)$.
2. Usando item anterior achar $\mathbb{E}(X_n)$.

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models*. Ninth Edition, Elsevier, 2007.