1. CAPÍTULO 7

Distribuições conjuntas.

Neste capítulo atribuimos a um ponto amostral valores de várias variáveis aleatórias e analisamos a sua distribuição conjunta. Por praticidade desenvolvemos a teoria para vetores de variáveis aleatórias bidimensionais mas os resultados estendem-se para o caso multidimensional de dimensão finita.

1.1. **Distribuições conjuntas discretas.** Começamos com um exemplo:

Exemplo 1.1. Um investidor simula uma sequência de sucessos, ou fracassos, anuais de suas aplicações por um período de três anos. Para isso supõe que a probabilidade de sucesso em determinado ano é p, $0 < p < 1$, independente dos resultados nos outros anos. Considera três variáveis de interesse:

A variável aleatória X, que indica se houve sucesso ou fracasso no primeiro ano. O sucesso (S) indicado pelo algarismo 1 e o fracasso (F) pelo algarismo 0;

a variável aleatória Y que indica o número de sucessos nos três anos e a variável aleatória

Z, indicando o número de mudanças (SF ou FS) que ocorreram durante os três anos.

A configuração dos resultados possíveis com as respectivas probabilidades é a distribuição conjunta tridimensional que apresenta os valores (x, y, z) do vetor aleatório (X, Y, Z) com suas respectivas probabilidades

$$P(X = x, Y = y, Z = z) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\} \cap \{Z = z\}),$$

por exemplo $P(X = 1, Y = 2, Z = 2) = p^2(1 - p)$.

Tabela 7.1- Distribuição tridimensional de (X, Y, Z)

Realizacão	(x, y, z)	$P(X = x, Y = y, Z = z)$
(S, S, S)	$(1, 3, 0)$	p^3
(S, S, F)	$(1, 2, 1)$	$p^2(1-p)$
(S, F, S)	$(1, 2, 2)$	$p^2(1-p)$
(F, S, S)	$(0, 2, 1)$	$p^2(1-p)$
(S, F, F)	$(1, 1, 1)$	$p(1-p)^2$
(F, S, F)	$(0, 1, 2)$	$p(1-p)^2$
(F, F, S)	$(0, 1, 1)$	$p(1-p)^2$
(F, F, F)	$(0, 0, 0)$	$(1-p)^3$

As distribuições unidimensionais das variáveis X, Y e Z são obtidas fixando o valor da variável de interesse e somando sobre os valores das outras variáveis.Analiticamente temos

$$P(X = x) = \sum_y \sum_z P(X = x, Y = y, Z = z).$$

Por exemplo

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 3, Z = 0) + P(X = 1, Y = 2, Z = 1) +$$
$$P(X = 1, Y = 2, Z = 2) + P(X = 1, Y = 1, Z = 1) =$$
$$p^3 + 2p^2(1-p) + p(1-p)^2 = p[p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2] = p[p + (1-p)]^2 = p.$$

A probabilidade do evento complementar é $P(X = 0) = 1 - p$. O resultado era esperado desde que X é uma variável aleatória de Bernoulli que tem média $E[X] = p$ e variância $Var(X) = p(1-p)$.

Obtemos a distribuição da variável Y de maneira semelhante e a sua função de probabilidade é

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Resumindo, $P(Y = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$ para $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Isto é, o número de sucessos em 3 ensaios de Bernoulli, independentes e identicamente distribuidos, com probabilidade de sucesso igual a p, tem distribuição binomial com média $E[Y] = 3p$ e variância $Var(Y) = 3p(1-p)$.

A variável Z assume os valores $0, 1, 2$ com probabilidades
$P(Z = 0) = p^3 + (1-p)^3$;
$P(z = 1) = 2p^2(1-p) + 2p(1-p)^2 = 2p(1-p)$;
$P(Z = 2) = p^2(1-p) + p(1-p)^2$.

A sua esperança é

$$E[Z] = 2p(1-p) + 2p^2(1-p) + 2p(1-p)^2 = 4p(1-p)$$

e sua variância

$Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = 6p(1-p) - 16p^2(1-p)^2 = 6p - 22p^2 + 32p^3 - 16p^4.$

A distribuição conjunta de (X, Z) pode ser representada por uma tabela de dupla entrada

Tabela 7.2- Distribuição bidimensional de (X, Z)

X, Z	0	1	2	total
0	$(1-p)^3$	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	1-p
1	p^3	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	p
total	$p^3 + (1-p)^3$	$2p(1-p)$	$pr(1-p) + p(1-p)^2$	1

No seu interior a tabela nos fornece a distribuição conjunta das variáveis (X, Z), isto é, os valores

$$P(X = x, Z = z) = P(\{X = x\} \cap \{Z = z\})$$

para todos os valores de X e de Z representados por x e z respectivemente. As suas margens fornecem as distribuições (marginais) de X e de Z.

Em uma primeira simulação o investidor imaginou o menos pior, ou seja, considerou a probabilidade de sucesso igual a $\frac{1}{2}$. A tabela torna-se

Tabela 7.3- Distribuição bidimensional de (X, Z), $p = \frac{1}{2}$

X, Z	0	1	2	total
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Em seguida, para um cenário de sucesso na carreira considerou $p = \frac{2}{3}$, projetando

Tabela 7.4- Distribuição bidimensional de (X, Z), $p = \frac{2}{3}$

X, Z	0	1	2	total
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{8}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{3}$
total	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

Quando estudamos a distribuição conjunta de variáveis aleatórias desejamos conhecer se, de alguma maneira, uma variável esta associada às outras. Um conceito essencial para uma análise neste sentido é o de distribuição condicional fundamentada no conceito de eventos condicionais: Se A e B são eventos com $P(B) > 0$, a probabilidade condicional do evento A dado a ocorrência de B é $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Definição 1.2. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas que assumem valores $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_m$ respectivamente. Se $P(X = x_i) > 0$, a probabilidade condicional de $\{Y = y_j\}$ dado $\{X = x_i\}$, denotada por $P(Y = y_j | X = x_i)$ é definida por

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Podemos observar que para x_i fixado com $P(X = x_i) > 0$, os pares $(y_j, P(Y = y_j | X = x_i))$ $1 \leq j \leq m$ caracterizam a distribuição de probabilidade da variável aleatória condicional $(Y | X = x_i)$. Observe que

$$\sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j | X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} =$$

$$\frac{1}{P(X = x_i)} \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{P(X = x_i)}{P(X = x_i)} = 1.$$

Na suposição de que $p = \frac{2}{3}$, a probabilidade condicional de termos uma única mudança, condicionada que se obteve sucesso no primeiro ano é:

$P(Z = 1 | X = 1) = \frac{P(X=1, Z=1)}{P(X=1)} = \frac{\frac{6}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{18}$.

A distribuição condicional da variável Z condicionada ao valor da variável $X = 1$ tem função de probabilidade:

$Z\|X = 1$	0	1	2
$P(Z = z\|X = 1)$	$\frac{8}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{4}{18}$

Observe que $\sum_{k=0}^{2} P(Z = k | X = 1) = 1$. A esperança da variável $(Z | X = 1)$ é

$$E[Z | X = 1] = \frac{6}{18} + \frac{8}{18} = \frac{14}{18}$$

e a variância da variável $(Z | X = 1)$ é

$$Var(Z | X = 1) = \frac{22}{18} - \frac{196}{324} = \frac{200}{324},$$

pois $E[Z^2 | X = 1] = \frac{6}{18} + \frac{16}{18} = \frac{22}{18}$.

Com argumento análogo concluimos que a distribuição condicional da variável Z condicionada ao valor da variável $X = 0$ tem função de probabilidade:

$Z\|X = 0$	0	1	2
$P(Z = z\|X = 0)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$

com
$E[Z|X=0]=\frac{10}{9}$, $E[Z^2|X=0]=\frac{14}{9}$ e $Var(Z|X=0)=\frac{56}{81}$.

Observe que uma variável Y quando condicionada aos valores de uma variável X é função de tais valores e como função de X é uma variável aleatória. Esta variável aleatória denotada por $\varphi(X)=E[Y|X]$ assume valores $E[Y|X=x]$ com respectivas probabilidades P(X=x).

$E[Y\|X]$	$E[Y\|X=x_1]$	...	$E[Y\|X=x_n]$
$P(E[Y\|X]=E[Y\|X=x])$	$P(X=x_1)$	...	$P(X=x_n)$

Portanto ao calcular $E\{E[Y|X]\}$ temos

$$E\{E[Y|X]\}=\sum_{j=1}^{m}E[Y|X=x_j]P(X=x_j)=$$

$$\sum_{j=1}^{m}[\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i|X=x_j)]P(X=x_j)+\sum_{j=1}^{m}[\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{P(Y=y_i,X=x_j)}{P(X=x_j)}]P(X=x_j)=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i,X=x_j)=\sum_{i=1}^{n}y_iP(Y=y_i)=E[Y].$$

Pode-se provar tambem que

$$Var(X)=E[Var(X|Y)]+Var(E[Y|X]).$$

Podemos utilizar os cálculos anteriores para, no caso em que $p=\frac{2}{3}$, exemplificarmos:

$$E\{E[Z|X]\}=E[Z|X=0]P(X=0)+E[Z|X=1]P(X=1)=$$

$$\frac{10}{9}\frac{1}{3}+\frac{14}{18}\frac{2}{3}=\frac{20+28}{54}=\frac{8}{9}=E[Z].$$

Um tópico importante na análise das distribuições conjuntas de variáveis aleatórias é o estudo da independência das mesmas.

Definição 1.3. Duas variáveis aleatórias X e Y assumindo valores nos conjuntos $\{x_1,...,x_n\}$ e $\{y_1,...,y_m\}$, respectivamente, são independentes se, e somente se,

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

para quaiquer possiveis pares de valores (x_i,y_j), $1\leq i\leq n$ $1\leq j\leq m$.

As variáveis aleatórias X e Z acima, quando consideramos $p = \frac{1}{2}$, tem distribuição conjunta representada por

Tabela 7.5- Distribuição bidimensional de (X, Z), $p = \frac{1}{2}$

X, Z	0	1	2	total
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

E podemos notar que a probabilidade conjunta é igual ao produto de suas marginais para todos os valores possíveis, por exemplo

$$P(X = 1, Z = 1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(X = 1)P(z = 1).$$

Portanto as variáveis X e Z são independentes.

Se consideramos $p = \frac{2}{3}$ temos

$$P(X = 1, Z = 1) = \frac{6}{27} \neq \frac{2}{3}\frac{4}{9} = P(X = 1)P(z = 1)$$

e podemos afirmar que, neste caso, X e Z não são independentes.

Podemos generalizar a definição de independência para um vetor de variáveis aleatórias com dimensões maiores. Vejamos o caso $n = 3$.

Definição 1.4. As variáveis aleatórias X_1, X_2 e X_3 são independentes se, e sómente se

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)P(X_3 = x_3),$$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2),$$

$$P(X_1 = x_1, X_3 = x_3) = P(X_1 = x_1)P(X_3 = x_3)$$

e

$$P(X_2 = x_2, X_3 = x_3) = P(X_2 = x_2)P(X_3 = x_3).$$

Operação entre variáveis aleatórias

Operações com variáveis aleatórias resultam em variáveis aleatórias. Portanto, se X e Y são variáveis aleatórias, as operações $\sqrt{X}$, $\ln Y$, $X + Y$, $X.Y$ são variáveis aleatórias e como tais, cada uma tem sua função de distribuição, sua média, sua variância e outras medidas.

A função de probabilidade induzida pela variável aleatória $g(X, Y)$ é caracterizada por:

$$P_{g(X,Y)}(k) = P(g(X, Y) = k) = \sum_{\{(x_i,y_j):g(x_i,y_j)=k\}} P(X = x_i, Y = y_j).$$

No que segue estudaremos algumas destas operações:

Se, no exemplo consideramos $p = \frac{2}{3}$, a distribuição conjunta de (X, Y) é dada por

Tabela 7.6- Distribuição bidimensional de (X, Y), $p = \frac{2}{3}$

X, Y	0	1	2	3	total
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{3}$
total	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

A distribuição da variável aleatória $X + Y$ assume os valores $x + y$, para todos os valores x e y de X e Y, respectivamente. A função de probabilidade de $X + Y$ é:

$X + Y$	0	1	2	3	4
$P(X + Y = x + y)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

de maneira que

$$E[X + Y] = \frac{8}{3} = \frac{2}{3} + 2 = E[X] + E[Y].$$

Este resultado sempre é verdadeiro, isto é, a esperança da soma de variáveis aleatórias é a soma de suas esperanças. O fato é uma consequência do teorema que segue que aceitamos sem prova. Sua prova pode ser encontrada em literatura mais especializada.

Teorema 1.5. *Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas que assumem valores $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_m$, respectivamente, com probabilidade conjunta $P(X = x_i, Y = y_j)$. Se $g(x, y)$ é uma função a valores reais, limitada, então*

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j).$$

Utilizando o Teorema 7.5 podemos provar o corolário:

Corolário 1.6. *Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas que assumem valores $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_m$ respectivamente, com probabilidade conjunta $P(X = x_i, Y = y_j)$. Então*

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$

Prova

Considerando, no Teorema 7.5, $g(x,y)=x+y$, obtemos

$$E[X+Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j))P(X=x_i,Y=y_j)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iP(X=x_i,Y=y_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_jP(X=x_i,Y=y_j)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}P(X=x_i,Y=y_j)+\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i,Y=y_j)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)+\sum_{j=1}^{m}y_jP(Y=y_j)=E[X]+E[Y].$$

Se consideramos a transformação produto, isto é, a variável aleatória XY que assume valores xy para todos os pares (x,y) do vetor aleatório (X,Y) com função de probabilidade

XY	0	1	2	3
$P(XY=xy)$	$\frac{9}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

concluimos que $E[XY]=\frac{17}{9}\neq\frac{2}{3}.2=E[X].E[Y]$.

Contudo, se consideramos a distribuição conjunta das variáveis aleatórias independentes X e Z, quando $p=\frac{1}{2}$ obtemos

Tabela 7.7- Distribuição bidimensional de (X,Z), $p=\frac{1}{2}$

X,Z	0	1	2	total
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

e a função de probabilidade de XZ é

y	0	1	2
$P(XZ=xz)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

com $E[XZ]=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.1=E[X].E[Z]$.

Utilizando o Teorema 7.5 podemos provar que esta propriedade é verdadeira

Corolário 1.7. *Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas independentes, que assumem valores $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_m$ respectivamente, com probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$. Então*

$$E[X.Y] = E[X].E[Y].$$

Prova

Considerando, no Teorema 7.5, $g(x, y) = x.y$, obtemos

$$E[X.Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i.y_j P(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i.y_j P(X = x_i).P(Y = y_j) \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i). \sum_{j=1}^{m} y_j P(Y = y_j) = E[X].E[Y].$$

Observamos que o corolário prova que a independência de X e Y é condição necessária para que $E[X.Y] = E[X].E[Y]$. A condição não é suficiente:

Exemplo 1.8. Se (X, Y) tem distribuição de probabilidade conjunta

Tabela 7.8- Distribuição conjunta de (X, Y)

X, Y	-1	0	1	total
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

temos $E[X.Y] = 0 = 0.0 = E[X].E[Y]$ mas $P(X = 0, Y = 0) \neq \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(X = 0).P(Y = 0)$.

As propriedades nos corolários 7.6 e 7.7 se estendem para um número finito de variáveis aleatórias. Se $(X_1, X_2, ..., X_n)$ é um vetor de variáveis aleatórias, então

$$E[X_1 + X_2 + ... + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n].$$

Se, em adição as variáveis aleatórias são independentes

$$E[X_1.X_2.....X_n] = E[X_1].E[X_2]....E[X_n].$$

Um tipo de dependência entre duas variáveis X e Y muito importante nas aplicações é a associação linear entre X e Y. Esta medida de relação linear entre as variáveis é denominada covariância e denotada por $Cov(X, Y)$.

Definição 1.9. Sejam X e Y variáveis aleatórias. A covariância entre X e Y é definida pela esperança do produto dos desvios de X e Y em relação às suas respectivas médias, isto é

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X]).(Y - E[Y])].$$

Observação 1.10. De maneira mais fácil podemos escrever

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X]).(Y - E[Y])] =$$
$$E[XY - X.E[Y] - Y.E[X] + E[X].E[Y]] = E[XY] - E[X].E[Y].$$

Quando X e Y são variáveis aleatórias discretas que assumem valores $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ respectivamente, podemos escrever utilizando o Teorema 9.5 que

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - E[X]).(y_j - E[Y])P(X = x_i, Y = y_j).$$

Claramente, usando o Corolário 7.7 , se X e Y são variáveis aleatórias independentes $Cov(X, Y) = 0$. Observamos tambem que, como no exemplo 7.8, a $Cov(X, Y)$ pode ser igual a zero quando X e Y são variáveis aleatórias dependentes.

Para o vetor aleatório (X, Y) com distribuição conjunta

Tabela 7.9- Distribuição conjunta de (X, Y)

X, Y	0	1	2	3	total
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{3}$
total	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

temos que

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X].E[Y] = \frac{14}{9} - \frac{2}{3}.2 = \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = \frac{2}{9}.$$

No Corolário 7.6 demonstramos que o valor esperado da soma de variáveis aleatórias é a soma dos valores esperados. O que podemos dizer sobre a variância da soma segue do corolário

Corolário 1.11. *Sejam X e Y variáveis aleatórias , então*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X,Y).$$

Se, em adição, X e Y forem independentes temos $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Prova

A prova é imediata:

$$Var(X+Y) = E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} = E\{[(X-E[X])+(Y-E[Y])]^2\} =$$

$$E[(X-E[X])^2 + E[(Y-E[Y])^2 + 2.E[(X-E[X]).(Y-E[Y])] =$$

$$Var(X) + VAR(Y) + 2.Cov(X,Y).$$

Se X e Y são independentes, $Cov(X,Y) = 0$ e temos

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Exemplo 1.12. Para o vetor aleatório (X,Y) com distribuição conjunta

Tabela 7.10- Distribuição conjunta de (X,Y)

X,Y	0	1	2	3	total
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{3}$
total	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

temos que
$Var(X) = \frac{2}{9}$, $Var(Y) = \frac{2}{3}$ e $Cov(X,Y) = \frac{14}{9} - \frac{2}{3}.2 = \frac{2}{9}$. Portanto

$$Var(X+Y) = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} + 2.\frac{2}{9} = \frac{12}{9}.$$

Exemplo 1.13. A distribuição Binomial com parâmetros n e p, $0 < p < 1$ pode ser interpretada como o número de sucessos quando realizamos n ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, independentes e identicamente distribuidos. A função de probabilidade da variável aleatória, X, de Bernoulli é

X	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

Assim a média de X é $E[X] = p$ e sua variância $Var(X) = p.(1-p)$.

Podemos interpretar a variável aleatória Binomial , Y, como a soma $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ de variáveis aleatórias, X_i, $1 \leq i \leq n$, de Bernoulli, independentes e identicamente distribuidas a X.

Portanto

$$E[Y] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

e

$$Var(Y) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p,(1-p) = np(1-p).$$

E-mail address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil