Prova 3. MAE0499 Processos Estocásticos. 22/11/2019

NOME____N°USP_____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	X				X				

1. Seja $\mathbf{P}$ matriz de transições de uma cadeia de Markov com estados $E = \{0,1,2,3\}$. Escolha alternativa correta sobre as classes de comunicação e desenha ao lado o grafo de transição.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

a) $\{0,1,2,3\}$, cadeia é irredutível;
b) $\{0\}, \{1,2\}, \{3\}$, cadeia não é irredutível;
c) $\{0,1\}, \{2,3\}$, cadeia não é irredutível;
d) $\{0\}, \{1\}, \{2,3\}$, cadeia não é irredutível;
e) $\{0,2\}, \{1,3\}$, cadeia não é irredutível.

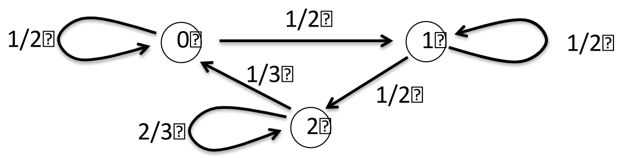
2. Dois navios atiram um para o outro instantaneamente em intervalos regulares. Para cada troca de tiros, o navio A atinge o navio B com uma probabilidade de 1/2 e o navio B atinge o navio A com uma probabilidade de 3/8. Supõe-se que, com qualquer acerto, o navio trava. Os resultados de uma série de disparos são considerados. Encontre a matriz de probabilidade de transição se os estados da cadeia forem combinações de navios que permanecem em serviço: "0"- ambos os navios em serviço, "1" - só navio A em serviço, "2" - só navio B em serviço, "3" os dois navios são atingidos.

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

3. X_n é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$: $X_{n+1} = X_n + 1$ com probabilidade p, e, $X_{n+1} = X_n - 1$ com probabilidade $q = 1 - p$. Supondo $X_0 = 1$, a probabilidade $P(X_4 = 1)$ é igual

a) $6p^2(1-p)^2$;
b) $2p^1(1-p)^3$;
c) $2p^3(1-p)^1$;
d) $4p^2(1-p)^2$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

4. Para cadeia de Markov representada pelo seguinte grafo de transição achar a distribuição estacionária $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$, se ela existe.



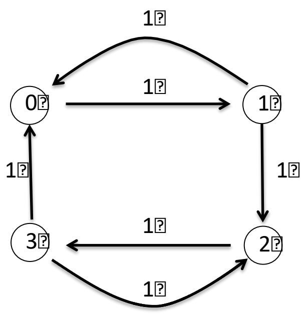
a) todas as distribuições do tipo $\pi_1 = x, \pi_2 = 1 - 2x, x \in [0,1]$ são distribuições estacionárias;
b) $\pi_1 = 2/7, \pi_2 = 3/7$;
c) $\pi_1 = 1/3, \pi_2 = 1/3$;
d) $\pi_1 = 1/5, \pi_2 = 2/5$;
e) a cadeia é redutível, por isso, não existe a distribuição estacionaria para essa cadeia.

5. A Maria joga melhor de que João. Seja p a probabilidade de Maria ganhar uma jogada. Maria está com 1 real e João com 2 reais. Achar o valor de p que iguala as chances de ganhar jogo.

a) $p = 1/(2(\sqrt{5} - 1))$;
b) $p = 2/(\sqrt{5} + 1)$;
c) $p = 1/(\sqrt{5} - 1)$;
d) $p = 1/(\sqrt{5} + 1)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

6. O jogo do item anterior consideramos em tempo contínuo de seguinte forma: antes de fazer a jogada a Maria pensa durante um tempo exponencial com parâmetro λ_M e só depois faça uma jogada, enquanto o João pensa durante um tempo exponencial com taxa λ_J. Sugere e desenha um grafo de transição para essa cadeia com tempo contínuo com respectivas taxas de transição ($\Lambda = (\lambda_{ij})$) descritos em termos de p, λ_M e λ_J.

7. Seja X_t uma cadeia de Markov com tempo contínuo representado pelo grafo de transição:



Achar $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$, a medida invariante deste processo. A cadeia é reversível?

a) não reversível, $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$;
b) não reversível, $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$;
c) reversível, $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$;
d) não reversível, $\pi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

8. Consideramos a cadeia X_t do item 7 anterior. A equação de Kolmogorov *backward* para a probabilidade $p_{01}(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

a) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = p_{11}(t) - p_{01}(t)$;
b) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = p_{01}(t) - p_{11}(t)$;
c) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = p_{11}(t)$;
d) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = -p_{01}(t)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

9. Consideramos a cadeia X_t do item 7 anterior. A equação de Kolmogorov *forward* para a probabilidade $p_{01}(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

a) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = p_{11}(t) - p_{01}(t)$;
b) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = p_{01}(t) - p_{11}(t)$;
c) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = p_{11}(t)$;
d) $\frac{d}{dt}p_{01}(t) = -p_{01}(t)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

10. Considere o processo de nascimento "puro" (processo Yule) com taxas de transição $\lambda_n = n\lambda$ e com conjunto de estado $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$. Escolha alternativa correta.

a) $p_{11}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$;
b) $p_{11}(t) = e^{-\lambda t}$;
c) $p_{11}(t) = 1 - \lambda e^{-2\lambda t}$;
d) $p_{11}(t) = e^{-\lambda t} - \lambda e^{-2\lambda t}$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

Algumas fórmulas úteis.

Medidas invariantes

1. *caso discreto:* seja $\pi = (\pi_i, i \in E)$ medida invariante então $\pi_i = \sum_{k\in E} \pi_k p_{ki}$; cadeia é reversível se $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ para $i \neq j \in E$ quaisquer.

2. *caso contínuo:* seja $\pi = (\pi_i, i \in E)$ medida invariante então $v_j \pi_j = \sum_{k\neq j} \pi_k q_{kj}$; cadeia é reversível se $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$ para $i \neq j \in E$ quaisquer.

Probabilidade de ruína de jogador

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, se\ p \neq 1/2 \\ \dfrac{i}{N}, \quad se\ p = 1/2 \end{cases}$$

Equação de Kolmogorov *backward*:

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Equação de Kolmogorov *forward*:

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - v_j P_{ij}(t)$$