Prova 1. *MAE0499 Processos Estocásticos.* Prof. A.Iambartsev /20/03/2019

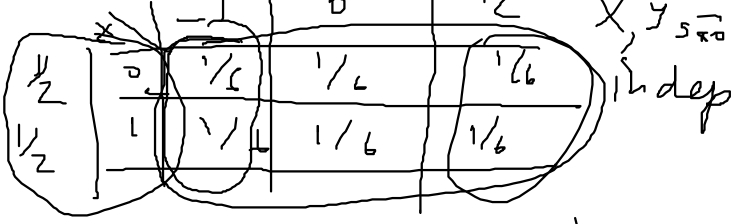
Nome	No USP

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	D	A	C	C	A	C	B	B	A

1. Sejam X, Y variáveis aleatórias com a distribuição $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ dada de seguinte forma:

$$p(0,-1) = 1/6,\ \ p(0,0) = 1/6,\ \ p(0,2) = 1/6$$
$$p(1,-1) = 1/6,\ \ p(1,0) = 1/6,\ \ p(1,2) = c \quad 1/6 \qquad c = 1/6$$

Escolha alternativa correta:



a) $c = 1/5$ e X, Y não são independentes;
b) $c = 1/3$ e X, Y não são independentes;
c) $c = 1/3$ e X, Y são independentes;
d) $c = 1/4$ e X, Y são independentes;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

2. Em condições do item anterior escolha alternativa correta.

$E(X|Y=y)$

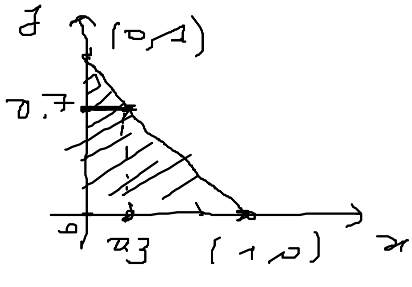
$E(X\|Y=y)$	y
0.5	-1
0.5	0
0.5	2

~~a)~~ $E(X|Y = -1) \neq E(X|Y = 2)$;
~~b)~~ $E(X|Y = 2) = \frac{1}{2} + c$;
~~c)~~ $E(X|Y = -1) \neq E(X) = 0.5$;
d) $E(X|Y = -1) = E(X) = 0.5$;
~~e)~~ $E(X) = \frac{1}{2} + c$.

$E(X|Y=y) = E(X) = 0.5$

3. Ponto $P = (X, Y)$ é uniformemente distribuído em triangulo $T = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, \text{e } x + y \leq 1\}$. Sabendo que $Y = 0.7$, escolha alternativa correta:

a) $X|Y = 0.7 \sim U[0, 0.3]$;
b) $X|Y = 0.7 \sim U[0, 1]$;
c) $X|Y = 0.7 \sim U[0, 0.7]$;
d) $X|Y = 0.7 \sim U[-1, 1]$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.



4. Seja $Y \sim U[1,3]$. Sabemos que dado valor de $Y = y$, a variável X tem distribuição exponencial com a taxa y: $X|Y = y \sim \exp(y)$. Escolha alternativa correta.

$X|Y=y \sim \exp(y)$

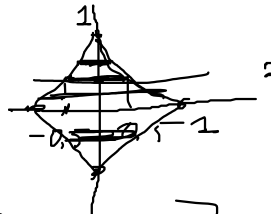
$E(X|Y=y) = \frac{1}{y} \qquad E(X|Y) = \frac{1}{Y}$

a) $E(X) = 1/2$;
b) $E(X) = 1/9$;
Vitor c) $E(X) = \ln(3)/2$;
d) $E(X) = \infty$;
e) $E(X) = e^2/2$.

$E(X) = E(E(X|Y)) = E\left(\frac{1}{Y}\right) \qquad Y \sim U[1,3]$

$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_1^3 \frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2}$

5. Seja (X,Y) uniformemente distribuído em área $Q = \{(x,y)\colon |x|+|y| \le 1\}$. Sabendo que $Y = 0.5$ a densidade $f(x|Y=0.5)$ de X ~~neste~~ caso é



a) $f(x|Y=0.5) = 0.5$, quando $x \in [-1,1]$ e 0 caso contrário;
b) $f(x|Y=0.5) = 2$, quando $x \in [0,0.5]$ e 0 caso contrário;
c) $f(x|Y=0.5) = 1$, quando $x \in [-0.5,0.5]$ e 0 caso contrário;
d) $f(x|Y=0.5) = 1$, quando $x+y = 0.5$ e 0 caso contrário;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

$U[-0.5, 0.5]$

$f(x|0.5) = \begin{cases} 1 & \in [-\ ] \\ 0 & \notin [-\ ] \end{cases}$

6. Em condições de item anterior escolha alternativa correta.

a) X,Y não são independentes, mas $E(X|Y=y) = 0$ para qualquer $y \in [-1,1]$;
~~b)~~ $\cancel{X}, Y$ são independentes, e $E(X|Y=y) = 1/3$ para qualquer $y \in [-1,1]$;
~~c)~~ $\cancel{X}, Y$ não são independentes, e $E(X|Y=y) = y+1$;
~~d)~~ $\cancel{X}, Y$ são independentes, e $E(X|Y=y) = 2y+1$;
~~e) nenhuma~~ das alternativas anteriores.

$E(X|Y=y) = 0$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty x e^{-x(1+y)}\,dx = \frac{1}{1+y}\int_0^\infty x(1+y)e^{-(1+y)x}\,dx = \boxed{\frac{1}{(1+y)^2}} \quad y>0$$

7. A distribuição conjunta de duas variáveis contínuas e positivas X e Y é dada pela densidade conjunta: $f_{X,Y}(x,y) = xe^{-x(1+y)},\ x,y \ge 0$. Calcule $E(X)$ e escolha alternativa correta.

$\neq \boxed{f_X(x) f_Y(y)}$

$x e^{-x} e^{-xy} = e^{-x} \cdot x e^{-xy} =$

$X \sim \exp(1)$

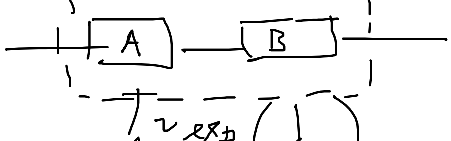
$Y \sim \exp(x)$

a) X,Y são independentes, e $E(X) = 1/(1+y)$;
~~b)~~ X,Y são independentes, e $E(X) = y+1$;
c) X,Y não são independentes, e $E(X) = 1$;
d) X,Y não são independentes, e $\cancel{E(X)} = y+1$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

$$f_X(x) = \int_0^\infty x e^{-x-xy}\,dy = e^{-x}\int_0^\infty x e^{-xy}\,dy = 1$$

$= g_X(x) f_{Y|X}(y|x)$

8. O sistema S é composto de dois componentes A e B que estão conectados em serie (isso significa, que o sistema S falha quando um dos componentes falha). Suponha que o tempos de vida T_A, T_B dos componentes A e B têm a distribuição exponencial com taxas λ_A e λ_B respectivamente. Nessas condições o tempo de funcionamento do sistema $T = \min(T_A, T_B)$ tem distribuição:



a) exponencial com média $\lambda_A\lambda_B/(\lambda_A+\lambda_B)$;
b) exponencial com média $1/(\lambda_A+\lambda_B)$;
c) exponencial com taxa $\lambda_A\lambda_B/(\lambda_A+\lambda_B)$;
d) exponencial com taxa $1/\lambda_A + 1/\lambda_B$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

$T_A \sim \exp(\lambda_A)$

$T_B \sim \exp(\lambda_B)$

$T = \min(T_A, T_B) \sim \exp(\lambda_A + \lambda_B)$

$\frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}$

9. A densidade de v.a. X é dada pela seguinte formula: $f(x) = 2(1-x)$, se $x \in (0,1)$ e $f(x) = 0$ caso contrário. Escolha alternativa correta.

a) $P\left(X > \frac{2}{3} \middle| X > \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$;

b) $P\left(X > \frac{2}{3} \middle| X > \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$;

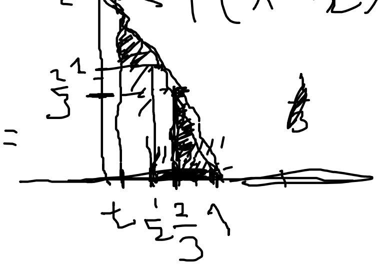
c) $P\left(X > \frac{2}{3} \middle| X > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$;

d) $P\left(X > \frac{2}{3} \middle| X > \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

e) nenhuma das alternativas anteriores.

$$= \frac{P(X > \frac{2}{3}, X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2})} = \frac{P(X > \frac{2}{3})}{P(X > \frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{2^2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$



$t \in (0,1)$

10. Para variável aleatória do item anterior escolha alternativa correta sobre a função falha $r(t) \coloneqq f(t)/P(X > t)$.

a) $r(t) = \frac{2}{1-t}$, se $t \in (0,1)$;

b) $r(t) = \frac{2(1+t)}{1-t^2-2t}$, se $t \in (0,1)$;

c) $r(t) = \frac{2(1-t)}{1-t^2+2t}$, se $t \in (0,1)$;

d) $r(t) = \frac{2}{(1-t)^2}$, se $t \in (0,1)$;

e) nenhuma das alternativas anteriores.

$$r(t) = \frac{\cancel{2(1-t)}}{(1-t)\cdot \cancel{2(1-t)} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{1-t}$$

$t \in (0,1)$

$$F(t) = \int_0^t 2(1-s)\,ds = \int_0^t 2\,ds - \int_0^t 2s\,ds$$

$$= 2t - t^2, \quad t \in (0,1)$$

$$P(X > t) = 1 - F(t) = 1 - 2t + t^2 = (1-t)^2$$

$$r(t) = \frac{2(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t}$$

Prova 1. *MAE0499 Processos Estocásticos*. Prof. A.Iambartsev /13/09/2019

Nome	No USP

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	X								

1. Sejam X, Y variáveis aleatórias com a distribuição $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ dada de seguinte forma:
$p(0,-1) = 1/6$, $p(0,0) = 1/6, p(0,2) = 1/6$
$p(1,-1) = 1/6$, $p(1,0) = 1/6, p(1,2) = 1/6$
Escolha alternativa correta:

a) $E(X) = 1/2, E(X|Y = -1) = 1/6$;
b) $E(X|Y)$ é variável aleatória com distribuição Bernoulli, B(1/6);
c) $E(X|Y)$ é o número e igual à 1/2;
d) $E(X) = E(X|Y = -1) = 0.5$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

2. Distribuição conjunta de duas variáveis continuas X, Y é dada pela densidade conjunta $f(x,y) = c(x^2 + y)$, $x, y \in (0,1)$. Achar: constante c e densidade condicional $f_{X|Y}(x|y)$ solucionando no espaço abaixo.

Solução:

Resposta: $c =$__________; $f_{X|Y}(x|y) =$______________________________.

$X, Y, Z \sim exp\left(\frac{1}{3}\right)$

3. X, Y, Z são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial com média 3. Seja $m = \min(X, Y, Z)$ e $M = \max(X, Y, Z)$. Escolha alternativa correta.

$m \sim exp\left(\frac{3}{3}\right) = exp(1)$

a) $P(m > z) = e^{-z}, z > 0$;
~~b) $P(M > z) = 1 - e^{-z}, z > 0$;~~ $F_M(x) = P(M \le x) = P(X \le x)^3 = (F(x))^3 =$
~~c) $m \sim \exp(9)$;~~ $= \left(1 - e^{-\frac{x}{3}}\right)^3 \neq 1 - e^{-\lambda x}$
~~d) $M \sim \exp(3)$;~~
e) nenhuma das alternativas anteriores.

$X \sim exp(\lambda)$ $P(X > x) = e^{-\lambda x}$

4. Seja $Y \sim U[0,1]$. Sabemos que dado valor de $Y = y$, a variável X tem distribuição exponencial com a taxa y: $X|Y = y \sim \exp(\sqrt{y})$. Escolha alternativa correta.

a) $E(X) = 1/2$;
b) $E(X) = 2$;
c) $E(X) = \ln(3)/2$;
d) $E(X) = \infty$;
e) $E(X) = e^2/2$.

5. Seja (X, Y) uniformemente distribuído em área $Q = \{(x, y):\ |x| + |y| \le 1\}$. Sabendo que $Y = y \in (-1,1)$ achar a função de distribuição cumulativa de X.

a) $X \sim U[-(1-y), -(y-1)]$;
b) $X \sim U[-|y|, |y|]$;
c) $X \sim U[-|1-y|, |1-y|]$;
d) $X \sim U[|y| - 1, 1 - |y|]$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

6. Em condições de item anterior escolha alternativa correta sobre $Z = X + Y$.

a) $E(Z) = 0$;
b) $P(Z > 0) = 1/3$;
c) $E(Z|Y = y) = y + 1$;
d) $E(Z|X = x) = 2x + 1$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

7. A distribuição conjunta de duas variáveis contínuas e positivas X e Y é dada pela densidade conjunta: $f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)},\ \ x, y \ge 0$. Calcule $E(XY)$.

a) 1;
b) 3;
c) 2;
d) 1/2;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

8. X, Y são i.i.d. com distribuição exponencial com média 3. Seja $Z = \min\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right)$.

a) $Z \sim \exp(2.5)$;
b) $Z \sim \exp(4.5)$;
c) $Z \sim \exp(15)$;
d) $Z \sim \exp(9)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

9. A densidade de v.a. X é dada pela seguinte formula: $f(x) = 1 - |x|$, se $x \in (-1,1)$ e $f(x) = 0$ caso contrário. Seja $p = P(X > 1/2 | X > -1/2)$.

a) $p = 2$;
b) $p = 1/2$;
c) $p = 1/7$;
d) $p = 1/8$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.

10. Para variável aleatória do item anterior escolha alternativa correta sobre a função falha $r(t)$.

a) $r(t) = \frac{2(1+t)}{1-t^2-2t}$, se $t \in (-1,1)$;
b) $r(t) = \frac{2(1+t)}{1-t^2-2t}$, se $t \in (-1,0)$;
c) $r(t) = \frac{2(1-t)}{1-t^2+2t}$, se $t \in (0,1)$;
d) $r(t) = \frac{2(1+t)}{(1-t)^2}$, se $t \in (0,1)$;
e) nenhuma das alternativas anteriores.