MAE 0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística I
Gabarito Lista de Exercícios 9

Segundo Semestre de 2017

EXERCÍCIO 1

(a) Temos que

$$P(X=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=0)+P(X=-1,Y=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2};$$
$$P(X=1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2},$$

e

$$P(Y=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4};$$
$$P(Y=0)=P(X=-1,Y=0)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};$$
$$P(Y=1)=P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

Em suma, as distribuições marginais de X e Y são dadas respectivamente por

x	-1	1
$P(X=x)$	$1/2$	$1/2$

e

y	-1	0	1
$P(Y=y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

(b) Por definição, o valor esperado da distribuição da variável aleatória X vale

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

Ademais, como

$$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1,$$

a variância da distribuição da variável aleatória X é igual à

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.$$

De modo análogo, temos que

$$E(Y) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0.$$

Como

$$E(Y^2) = 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

a variância da distribuição da variável aleatória Y é igual à

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{2}.$$

Agora, uma vez que

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) &= E(XY) \\
&= (-1) \times (-1) \times \frac{1}{6} + (-1) \times 0 \times \frac{1}{6} + (-1) \times 1 \times \frac{1}{6} + \\
&\quad + 1 \times (-1) \times \frac{1}{12} + 1 \times 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{1}{12} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

segue que $\rho(X,Y) = 0$.

(c) Não, pois

$$P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = P(X = -1)P(Y = -1).$$

(d) Para $i = -1$, temos

$$P(Y = -1|X = -1) = \frac{P(Y = -1, X = -1)}{P(X = -1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3};$$
$$P(Y = 0|X = -1) = \frac{P(Y = 0, X = -1)}{P(X = -1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3};$$
$$P(Y = 1|X = -1) = \frac{P(Y = 1, X = -1)}{P(X = -1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

e, para $i = 1$,

$$P(Y = -1|X = 1) = \frac{P(Y = -1, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6};$$
$$P(Y = 0|X = 1) = \frac{P(Y = 0, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3};$$
$$P(Y = 1|X = 1) = \frac{P(Y = 1, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}.$$

De modo equivalente, a distribuição condicional de Y dado $X = -1$ é dada por

u	-1	0	1
$P(Y = u \mid X = -1)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

e a distribuição condicional de Y dado $X = 1$ por

u	-1	0	1
$P(Y = u \mid X = 1)$	$1/6$	$2/3$	$1/6$

Daí,

$$E(Y|X = -1) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0,$$

e

$$E(Y|X = 1) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = 0.$$

(e) Observe que Z e W assumem valores em $\{-2,-1,0,1,2\}$ e, para

$$\begin{gathered}(x,y)=(-1,-1),\ (z,w)=(0,-2);\\ (x,y)=(-1,0),\ (z,w)=(-1,-1);\\ (x,y)=(-1,1),\ (z,w)=(-2,0);\\ (x,y)=(1,-1),\ (z,w)=(2,0);\\ (x,y)=(1,0),\ (z,w)=(1,1);\\ (x,y)=(1,1),\ (z,w)=(0,2).\end{gathered}$$

Assim,

$$\begin{gathered}P(Z=\text{-}2,W=0)=P(X=\text{-}1,Y=1)=1/6;\\ P(Z=\text{-}1,W=\text{-}1)=P(X=\text{-}1,Y=0)=1/6;\\ P(Z=0,W=\text{-}2)=P(X=\text{-}1,Y=\text{-}1)=1/6;\\ P(Z=0,W=2)=P(X=1,Y=1)=1/12;\\ P(Z=1,W=1)=P(X=1,Y=0)=1/3;\\ P(Z=2,W=0)=P(X=1,Y=\text{-}1)=1/12.\end{gathered}$$

De modo equivalente, a distribuição conjunta de Z e W é dada por

Z/W	-2	-1	0	1	2
-2	0	0	1/6	0	0
-1	0	1/6	0	0	0
0	1/6	0	0	0	1/12
1	0	0	0	1/3	0
2	0	0	1/12	0	0

Por fim,

$$\begin{aligned}P(XY\le 0)&=P(X=-1,Y=0)+P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=-1)\\ &=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\\ &=\frac{9}{12}\\ &=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 2

(a) Note que X assume valores em $\{1,2,3,4\}$ e Y em $\{0,1,2,3,4\}$. Pelo enunciado, sabemos que

$$P(X=x)=\frac{1}{4}, \quad x=1,\ldots,4, \tag{1}$$

e que, dado $X=x$, Y pode ser visto como o número de sucessos(o acordo gera um novo acordo) em x ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso $p=1/2$, isto é,

$$P(Y=y \mid X=x)=\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, \quad y=0,\ldots,x. \tag{2}$$

Daí, para $x\in\{1,2,3,4\}$ e $y\in\{0,1,2,3,4\}$,

$$P(X=x,Y=y)=\frac{1}{4}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, \quad \text{se } y\leq x, \tag{3}$$

e zero caso contrário, isto é,

$$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{4}\binom{1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{8};$$
$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}\binom{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{8};$$
$$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{4}\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{16};$$
$$P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{2}{16};$$
$$P(X=2,Y=2)=\frac{1}{4}\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{16};$$
$$P(X=3,Y=0)=\frac{1}{4}\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{32};$$
$$P(X=3,Y=1)=\frac{1}{4}\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{3}{32};$$
$$P(X=3,Y=2)=\frac{1}{4}\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{3}{32};$$
$$P(X=3,Y=3)=\frac{1}{4}\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{32};$$

$$P(X=4,Y=0)=\frac{1}{4}\binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{64};$$
$$P(X=4,Y=1)=\frac{1}{4}\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{64};$$
$$P(X=4,Y=2)=\frac{1}{4}\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{64};$$
$$P(X=4,Y=3)=\frac{1}{4}\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{64};$$
$$P(X=4,Y=4)=\frac{1}{4}\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{64},$$

e $P(X=x,Y=y)=0$ em outros casos. Em suma, a distribuição conjunta de X e Y é dada por

X/Y	0	1	2	3	4
1	1/8	1/8	0	0	0
2	1/16	2/16	1/16	0	0
3	1/32	3/32	3/32	1/32	0
4	1/64	4/64	6/64	4/64	1/64

(b) Não, pois

$$P(X=4,Y=4)=\frac{1}{64}\neq\frac{1}{4}\times\frac{1}{64}=P(X=4)P(Y=4).$$

(c) Denotemos por Z o númeero de acordo firmados ao cabo dos dois meses. Temos que $Z=X+Y$ com possíveis valores dados por $1,2,3,4,5,6,7$ e 8 e tal que

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)=\frac{1}{8};$$
$$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)=\frac{3}{16};$$
$$P(Z=3)=P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=0)=\frac{5}{32};$$
$$P(Z=4)=P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1)+P(X=4,Y=0)=\frac{11}{64};$$
$$P(Z=5)=P(X=3,Y=2)+P(X=4,Y=1)=\frac{5}{32};$$
$$P(Z=6)=P(X=3,Y=3)+P(X=4,Y=2)=\frac{1}{8};$$
$$P(Z=7)=P(X=4,Y=3)=\frac{1}{16};$$
$$P(Z=8)=P(X=4,Y=4)=\frac{1}{64},$$

isto é, a distribuição de probabilidade de Z é dada por

z	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(Z=z)$	1/8	3/16	5/32	11/64	5/32	1/8	1/16	1/64

Agora, seja W o retorno final em reais. É claro que $W = kZ$. Logo, o retorno esperado ao término dos dois meses é dado por

$$\begin{aligned}
E(W) &= kE(Z) \\
&= k \times \left[1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{11}{64} + 5 \times \frac{5}{32} + 6 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{1}{16} + 8 \times \frac{1}{64}\right] \\
&= 3,75k.
\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 3

Seja X_i o número de horas gastas por Jay na $i-$ésima tarefa, $i = 1, 2$. Pelo enunciado, sabemos que

$$P(X_i = x_i) = (1 - p_i)^{x_i - 1} p_i, \quad x_i \in \{1, 2, 3, \ldots\},\ i = 1, 2,$$

e que

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = (1 - p_1)^{x_1 - 1} p_1 (1 - p_2)^{x_2 - 1} p_2, \quad x_1, x_2 \in \{1, 2, 3, \ldots\},$$

isto é, X_1 e X_2 são independentes. Agora, seja Y o número de horas gastas por Jay para concluir as duas tarefas. É claro que $Y = X_1 + X_2$, que assume valores em $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Nessas condições, a probabilidade de que Jay leve mais do que 5 horas para concluir as duas tarefas é dada por

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - [P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5)].$$

Mas, para $p_1 = 0,3$ e $p_2 = 0,4$,

$$P(Y = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0,3 \times 0,4 = 0,12;$$

$$P(Y = 3) = P(X_1 = 1, X_2 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = 1) = 0,3 \times 0,6 \times 0,4 + 0,7 \times 0,3 \times 0,4 = 0,156;$$

$$\begin{aligned}
P(Y = 4) &= P(X_1 = 1, X_2 = 3) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + P(X_1 = 3, X_2 = 1) \\
&= 0,3 \times 0,6^2 \times 0,4 + 0,7 \times 0,3 \times 0,6 \times 0,4 + 0,7^2 \times 0,3 \times 0,4 = 0,1524;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y = 5) &= P(X_1 = 1, X_2 = 4) + P(X_1 = 2, X_2 = 3) + P(X_1 = 3, X_2 = 2) + P(X_1 = 4, X_2 = 1) \\
&= 0,3 \times 0,6^3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,3 \times 0,6^2 \times 0,4 + 0,7^2 \times 0,3 \times 0,6 \times 0,4 + 0,7^3 \times 0,3 \times 0,4 \\
&= 0,1326;
\end{aligned}$$

e a probabilidade de interesse fica dada por

$$P(Y > 5) = 1 - [0,12 + 0,156 + 0,1524 + 0,1326] = 0,439.$$