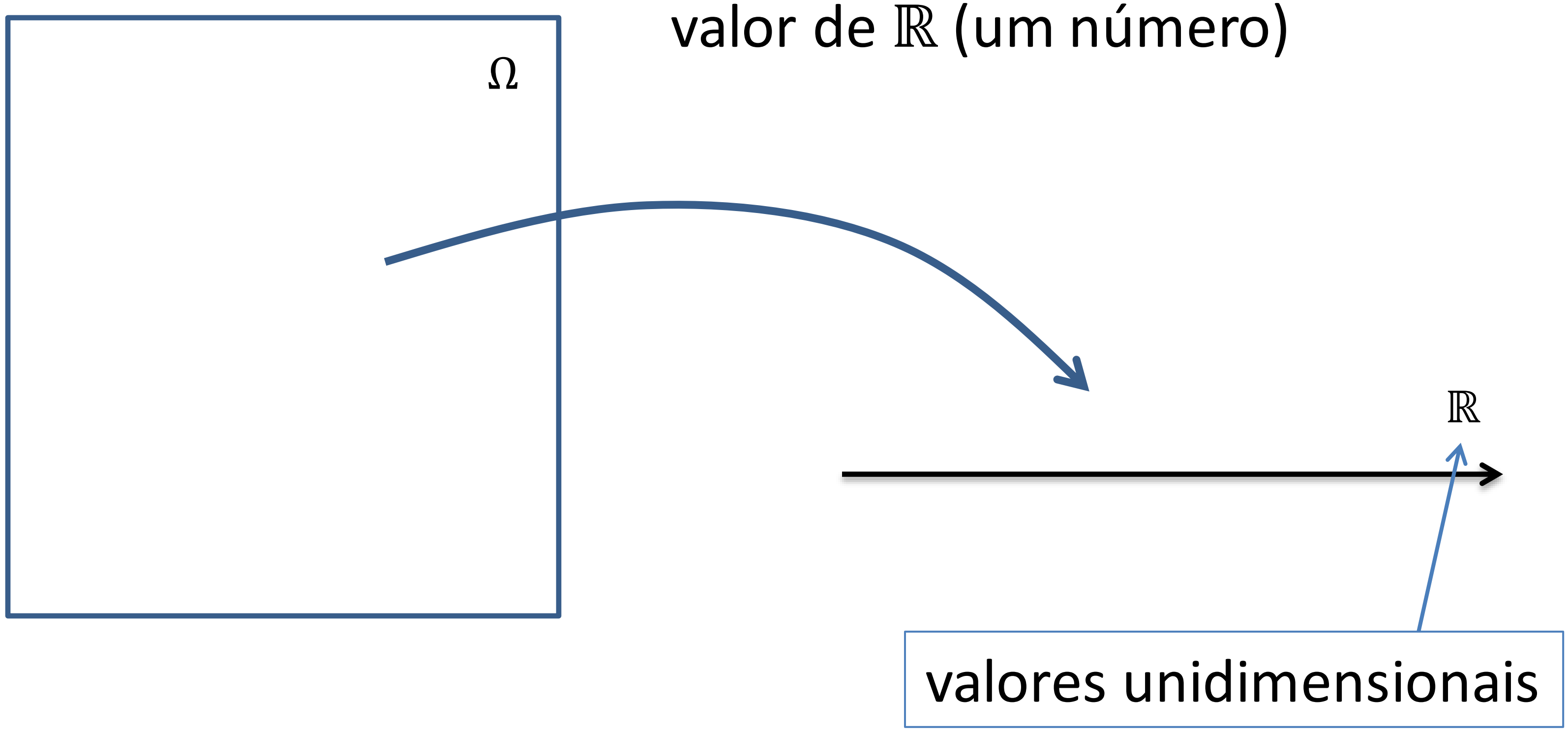
Aula 10. Variáveis Aleatórias Discretas Bidimensionais

Resumo de caso unidimensional

Definição "formal": Variável aleatória é qualquer *função* definida em espaço Ω.

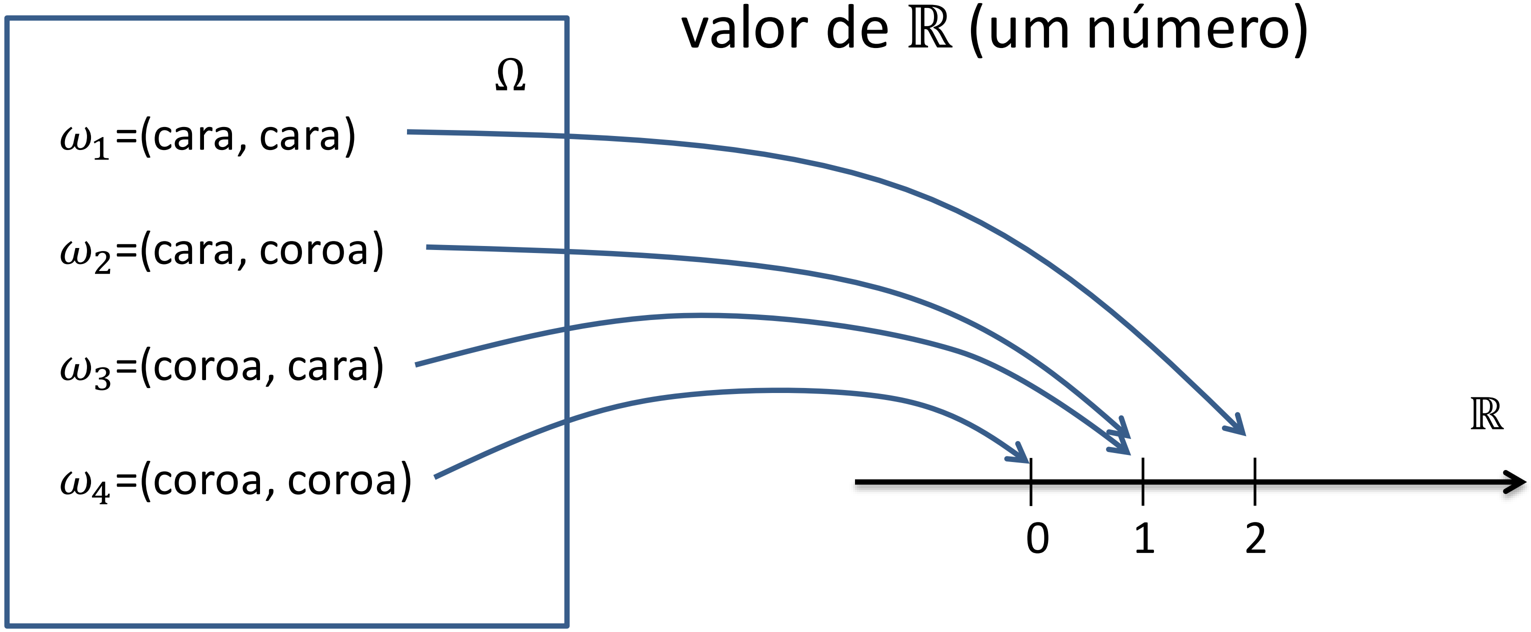
função é uma regra que para cada valor de domínio corresponde **um** valor de $\mathbb{R}$ (um número)



Resumo de caso unidimensional

Definição "formal": Variável aleatória é qualquer *função* definida em espaço Ω.

função é uma regra que para cada valor de domínio corresponde **um** valor de $\mathbb{R}$ (um número)

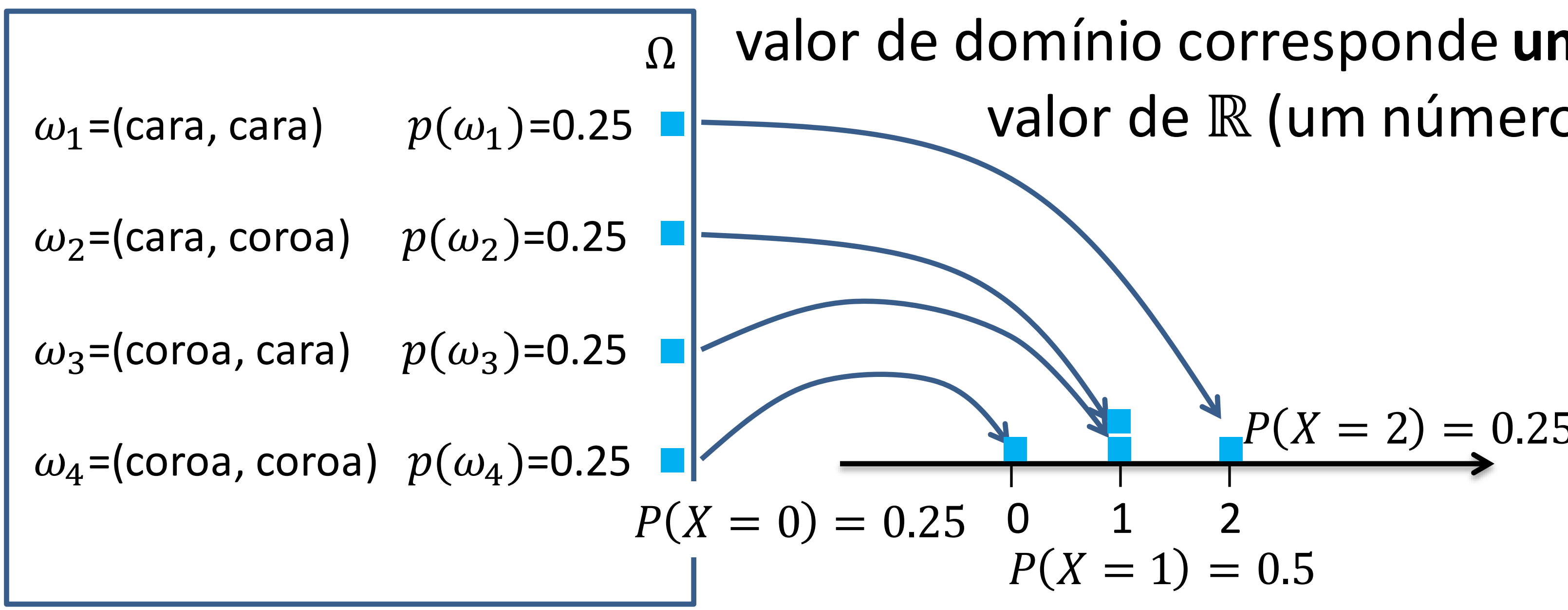


Variável aleatória X é número de "caras" em experimento de duas jogadas de uma moeda

Resumo de caso unidimensional

Junto com elementos ω_i de espaço Ω vamos "transferir" para $\mathbb{R}$ a probabilidade (ou peso) de cada elemento $p(\omega_i)$

função é uma regra que para cada valor de domínio corresponde **um** valor de $\mathbb{R}$ (um número)

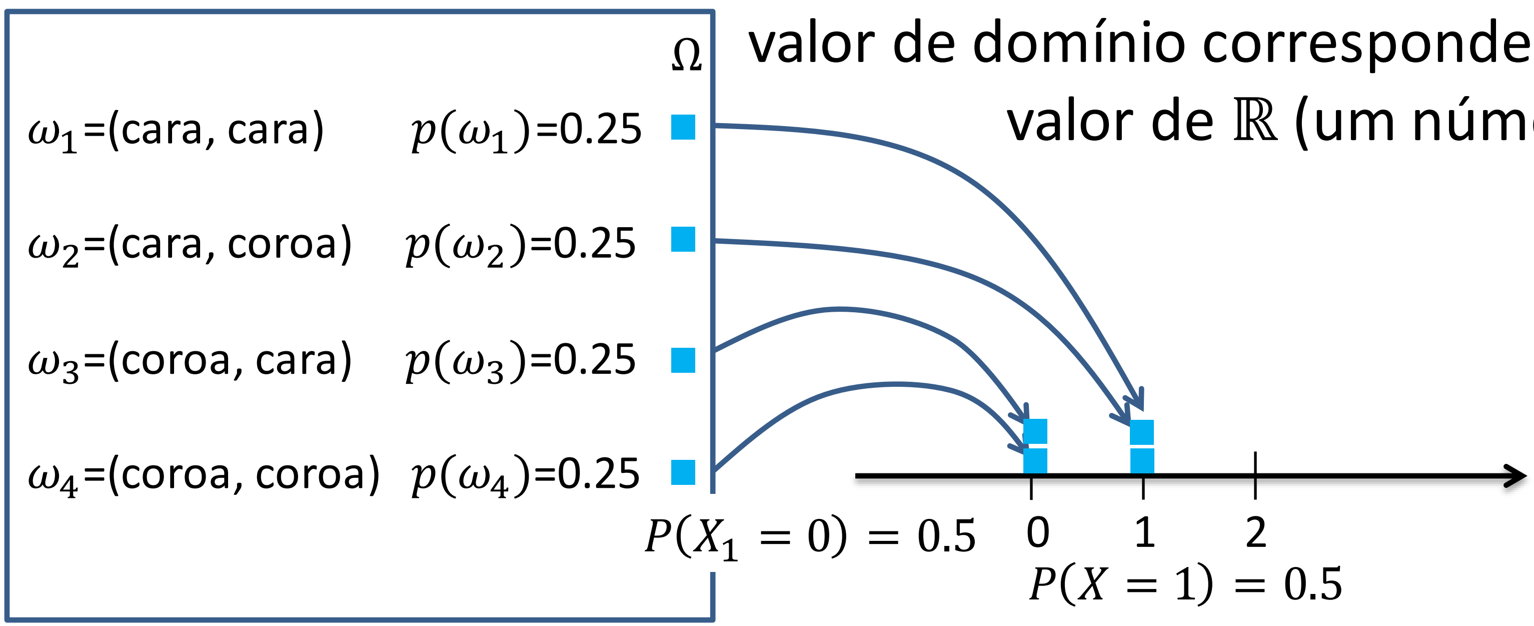


Variável aleatória X é número de "caras" em experimento de duas jogadas de uma moeda

Resumo de caso unidimensional

Junto com elementos ω_i de espaço Ω vamos "transferir" para $\mathbb{R}$ a probabilidade (ou peso) de cada elemento $p(\omega_i)$

função é uma regra que para cada valor de domínio corresponde **um** valor de $\mathbb{R}$ (um número)

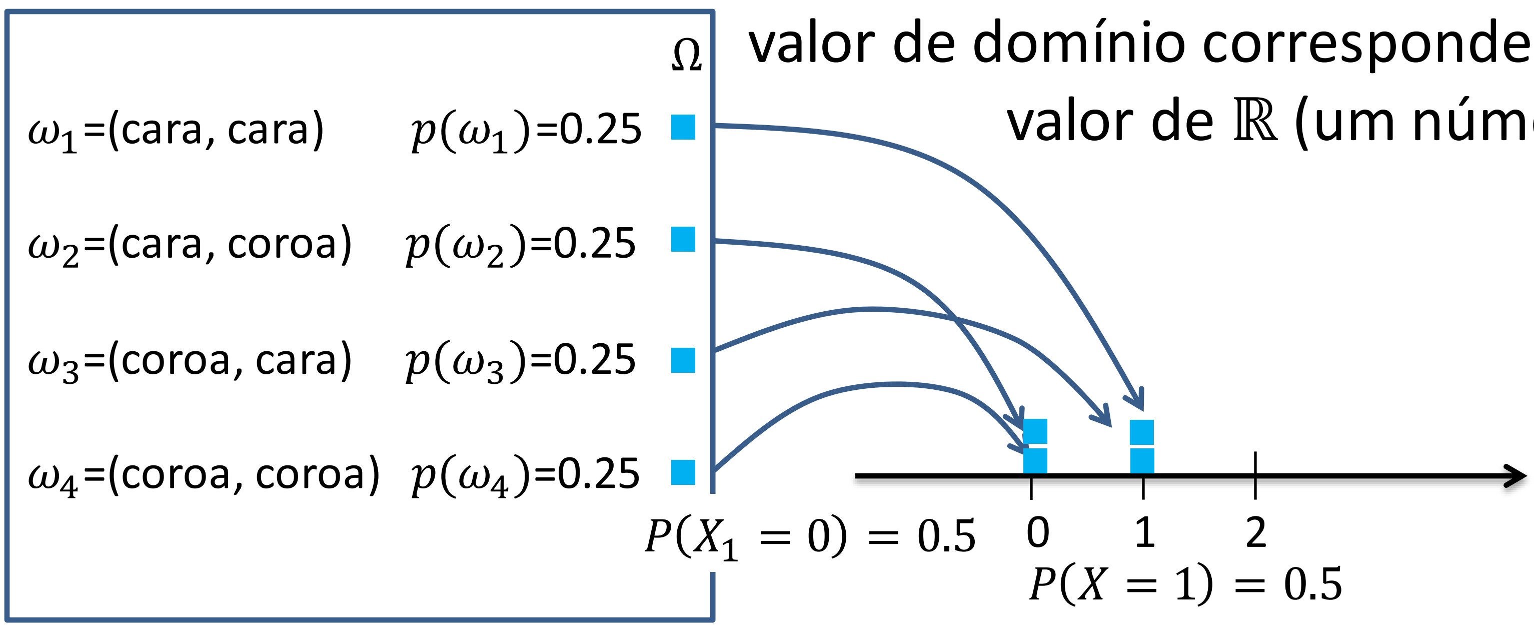


Variável aleatória X_1 é número de "caras" na primeira jogadas de uma moeda

Resumo de caso unidimensional

Junto com elementos ω_i de espaço Ω vamos "transferir" para $\mathbb{R}$ a probabilidade (ou peso) de cada elemento $p(\omega_i)$

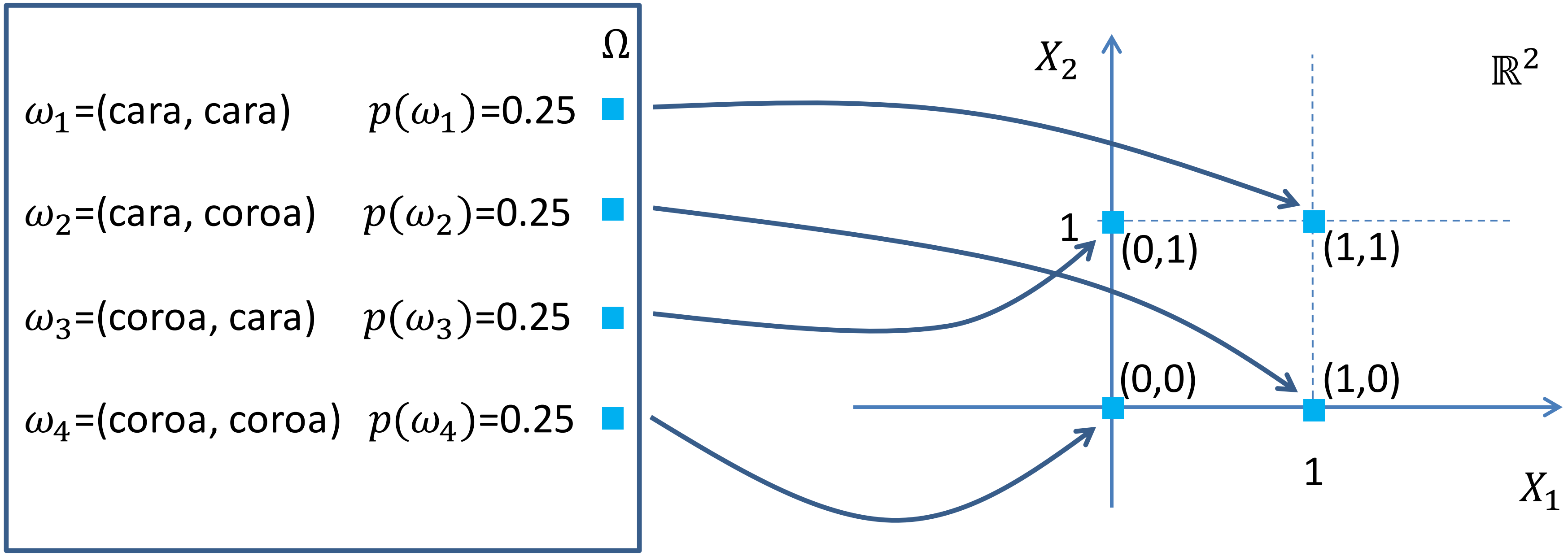
função é uma regra que para cada valor de domínio corresponde **um** valor de $\mathbb{R}$ (um número)



Variável aleatória X_2 é número de "caras" na segunda jogadas de uma moeda

Caso bidimensional

Variável aleatória **conjunta** de duas variáveis X_1 e X_2?
Queremos observar conjunto de par de variáveis (X_1, X_2) -
- número de "caras" na primeira e na segunda jogadas de uma moeda

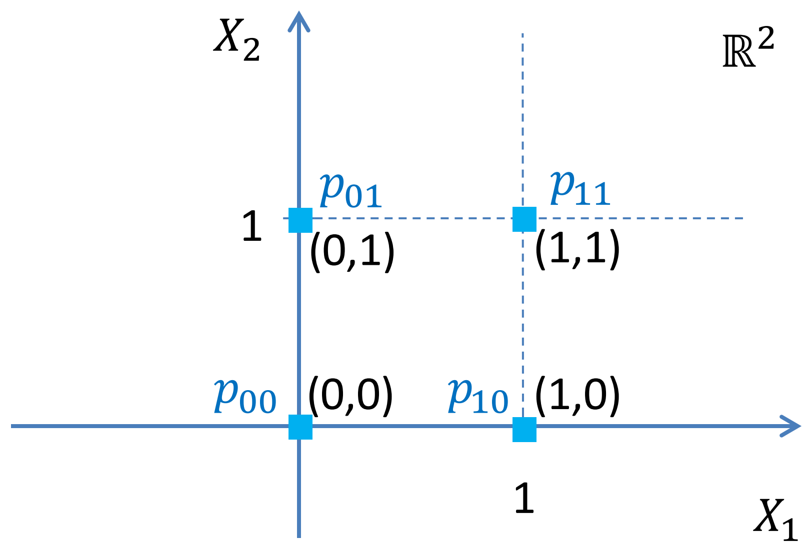


$$P\big((X_1, X_2) = (0{,}0)\big) = 0.25; P\big((X_1, X_2) = (1{,}0)\big) = 0.25$$
$$P\big((X_1, X_2) = (0{,}1)\big) = 0.25; P\big((X_1, X_2) = (1{,}1)\big) = 0.25$$

Variável aleatória bidimensional (ou conjunta)
é uma função bidimensional $X\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	p_{00}	p_{01}
1	p_{10}	p_{11}

$p_{00}+p_{01}+p_{10}+p_{11}=1$



$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

Distribuição conjunta de variáveis aleatórias X e Y pode ser representada pela seguinte tabela

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

$$p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

<u>Exemplo 1</u>: Consideramos o experimento com duas jogadas de moeda. Seja como antes X_1 e X_2 são números de caras em primeira e segunda jogada respectivamente. Observamos duas variáveis: $X = X_1 - X_2$ e $Y = X_1 + X_2$. Construir a tabela de distribuição conjunta de v.a.s X, Y.

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

$X \backslash Y$	0	1	2
-1		0,25	
0	0,25		0,25
1		0,25	

Exemplo 1: Consideramos o experimento com duas jogadas de moeda. Seja como antes X_1 e X_2 são números de caras em primeira e segunda jogada respectivamente. Observamos duas variáveis: $X = X_1 - X_2$ e $Y = X_1 + X_2$. Construir a tabela de distribuição conjunta de v.a.s X, Y.

X \ Y	0	1	2
-1	0	0,25	0
0	0,25	0	0,25
1	0	0,25	0

1) $p_{ij} \geq 0$

2) $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Distribuições marginais

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

$$\boxed{p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}}$$

$$\boxed{p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}}$$

$$\boxed{\sum_{i,j} p_{ij} = 1}$$

Distribuições marginais

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

Distribuição X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$

Distribuição Y

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
P	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$

<u>Exemplo 2</u>: A distribuição conjunta de duas variáveis X e Y é dada pela tabela abaixo. Achar as distribuições (marginais) de v.a.s X e Y.

$X \backslash Y$	0	1	2	
-1	0	0,25	0	$\mathbf{0,25}$
0	0,25	0	0,25	$\mathbf{0,5}$
1	0	0,25	0	$\mathbf{0,25}$
	$\mathbf{0,25}$	$\mathbf{0,5}$	$\mathbf{0,25}$	

Distribuição X

X	-1	0	1
P	0,25	0,5	0,25

Distribuição Y

Y	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Distribuição de $Z = f(X, Y)$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	$f(x_1, y_1)$ p_{11}	$f(x_1, y_2)$ p_{12}	$\cdots$	$f(x_1, y_m)$ p_{1m}
x_2	$f(x_2, y_1)$ p_{21}	$f(x_2, y_2)$ p_{22}	$\cdots$	$f(x_2, y_m)$ p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$f(x_n, y_1)$ p_{n1}	$f(x_n, y_2)$ p_{n2}	$\cdots$	$f(x_n, y_m)$ p_{nm}

$$P(Z = k) = \sum_{\substack{x_i, y_j: \\ f(x_i, y_j) = k}} p_{ij}$$

<u>Exemplo 2</u>: Dada distribuição conjunta de variáveis X_1 e X_2 achar a distribuição de variável $Y = X_1 + X_2$, e a sua esperança $E(Y)$.

X_1 \ X_2	0	1,5	2
-1,5	$1/27$ $\mathbf{-1,5}$	$1/27$ $\mathbf{0}$	$1/27$ $\mathbf{0,5}$
-0,5	$1/27$ $\mathbf{-0,5}$	$6/27$ $\mathbf{1}$	$5/27$ $\mathbf{1,5}$
0	$1/27$ $\mathbf{0}$	$5/27$ $\mathbf{1,5}$	$6/27$ $\mathbf{2}$

-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27} + \frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{5}{27} + \frac{5}{27}$	$\frac{6}{27}$

Y	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{6}{27}$

<u>Exemplo 2</u>: Dada distribuição conjunta de variáveis X_1 e X_2 achar a distribuição de variável $Y = X_1 + X_2$, e a sua esperança $E(Y)$.

$X_1 \backslash X_2$	0	1,5	2
-1,5	$1/27$ $\mathbf{-1,5}$	$1/27$ $\mathbf{0}$	$1/27$ $\mathbf{0,5}$
-0,5	$1/27$ $\mathbf{-0,5}$	$6/27$ $\mathbf{1}$	$5/27$ $\mathbf{1,5}$
0	$1/27$ $\mathbf{0}$	$5/27$ $\mathbf{1,5}$	$6/27$ $\mathbf{2}$

Y	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{6}{27}$

$$E(Y) = -1{,}5 \cdot \frac{1}{27} - 0{,}5 \cdot \frac{1}{27} + 0 \cdot \frac{2}{27} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{27} + \\ +1 \cdot \frac{6}{27} + 1{,}5 \cdot \frac{10}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} = \frac{\mathbf{31,5}}{\mathbf{27}}$$

$$E(Y) = \mathbf{-1,5} \cdot \frac{1}{27} + \mathbf{0} \cdot \frac{1}{27} + \mathbf{0,5} \cdot \frac{1}{27} + \\ \mathbf{-0,5} \cdot \frac{1}{27} + \mathbf{1} \cdot \frac{6}{27} + \mathbf{1,5} \cdot \frac{6}{27} + \\ +\mathbf{0} \cdot \frac{1}{27} + \mathbf{1,5} \cdot \frac{5}{27} + \mathbf{2} \cdot \frac{6}{27} = \frac{\mathbf{31{,}5}}{\mathbf{27}}$$

$$E\big(f(X,Y)\big) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) p_{ij}$$

Independência de variáveis aleatórias

Independência de eventos: dois eventos A e B são independentes, se a probabilidade de ocorrência de A e a probabilidade de ocorrência de A dado ocorrência de B são iguais $P(A \mid B) = P(A), P(B \mid A) = P(B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

<u>Definição "oficial" de independência</u>: dois eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Independência de variáveis aleatórias

O que significa a independência de v.a.s com a distribuição conjunta dada?

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

independência: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$p_{ij} = P(\overbrace{X = x_i}^{A}, \overbrace{Y = y_j}^{B})$$

$$= P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

$$= p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$$

Independência de variáveis aleatórias

$X \backslash Y$			y_j		
			$\vdots$		
			$\vdots$		
x_i	$\cdots$	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
			$\vdots$		
			$p_{\cdot j}$		

duas variáveis aleatórias são independentes se

$$p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$$

para i, j quaisquer.

Exemplo 3: Dada distribuição conjunta de variáveis X_1 e X_2 responder se elas são independentes ou não.

$X_1 \backslash X_2$	0	1,5	2	
-1,5	$1/27$	$1/27$	$1/27$	$\mathbf{3/27}$
-0,5	$1/27$	$6/27$	$5/27$	$\mathbf{12/27}$
0	$1/27$	$5/27$	$6/27$	$\mathbf{12/27}$
	$\mathbf{3/27}$	$\mathbf{12/27}$	$\mathbf{12/27}$	

1. Achamos as distribuições marginais

2. Verificamos se $p_{ij} = p_{i}.\, p_{.j}$ para i, j quaisquer.

Já para caso p_{11} a equação não satisfaz: $\frac{1}{27} \neq \frac{3}{27} \cdot \frac{3}{27}$

Resposta: as variáveis aleatórias X_1 e X_2 não são independentes

Distribuição condicional

Exemplo 4: Dada distribuição conjunta de variáveis X_1 e X_2 achar a distribuição de X_1 dado $X_2 = 2$.

$X_1 \backslash X_2$	0	1,5	2	
-1,5	$1/27$	$1/27$	$1/27$	$\mathbf{3/27}$
-0,5	$1/27$	$6/27$	$5/27$	$\mathbf{12/27}$
0	$1/27$	$5/27$	$6/27$	$\mathbf{12/27}$
	$\mathbf{3/27}$	$\mathbf{12/27}$	$\mathbf{12/27}$	

$X_1 \backslash X_2$	0	1,5	2
-1,5	$1/27$	$1/27$	$\dfrac{\mathbf{1/27}}{\mathbf{12/27}}$
-0,5	$1/27$	$6/27$	$\dfrac{\mathbf{5/27}}{\mathbf{12/27}}$
0	$1/27$	$5/27$	$\dfrac{\mathbf{6/27}}{\mathbf{12/27}}$
	$3/27$	$12/27$	$\mathbf{12/27}$

$$P(X_1 = x_i \,|X_2 = 2) = \frac{P(X_1 = x_i, X_2 = 2)}{P(X_2 = 2)}$$

Resposta:

$X_1 \,|\, X_2 = 2$	-1,5	-0,5	0
P	$1/12$	$5/12$	$1/2$

Distribuição condicional

$X_1 \mid X_2 = 2$	-1,5	-0,5	0
P	$1/12$	$5/12$	$1/2$

A esperança e variância dessa distribuição chamaremos como a esperança e a variância condicionais e denotamos

$$E(X_1|X_2 = 2), Var(X_1|X_2 = 2)$$

$$E\left(X\middle|Y = y_j\right) = \sum_i x_i P(X = x_i|Y = y_j)$$

$$Var\left(X\middle|Y = y_j\right) = E\left(X^2\middle|Y = y_j\right) - E\left(X\middle|Y = y_j\right)^2$$

Covariância e coeficiente de correlação

Covariância entre duas v.a.s $\text{cov}(X,Y)$ é, pela definição, a esperança

$$\text{cov}(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

Outra forma alternativa de calcular a covariância $\text{cov}(X,Y)$ é

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

$$E(X) = \sum_{i} x_i p_{i\cdot}$$

$$E(Y) = \sum_{j} y_j p_{\cdot j}$$

Covariância e coeficiente de correlação

Se duas variáveis X e Y são independentes, então $\operatorname{cov}(X,Y) = 0.$

Para ver isso basta observar que neste caso $E(XY) = E(X)E(Y)$:

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i,j} x_i y_j p_{i\cdot} p_{\cdot j}$$
$$= \sum_{i,j} x_i p_{i\cdot} \sum_{i,j} y_j p_{\cdot j} = E(X)E(Y)$$

então

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

Covariância e coeficiente de correlação

Coeficiente de correlação entre duas v.a.s $\rho(X,Y)$ é dado pela formula

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
2. $\rho(X,Y) = 1$ se e somente se existe $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$
3. $\rho(X,Y) = -1$ se e somente se existe $b < 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Coeficiente $\rho(X,Y)$ as vezes chamam de medida de dependencia linear.

Exemplo 5: Dada distribuição conjunta de variáveis X_1 e X_2 achar a covariância $\text{cov}(X_1, X_2)$ e coeficiente de correlação $\rho(X_1, X_2)$.

$X_1 \backslash X_2$	0	1,5	2	
-1,5	1/27 (0)	1/27 (-2,25)	1/27 (-3)	**3/27**
-0,5	1/27 (0)	6/27 (-0,75)	5/27 (-1)	**12/27**
0	1/27 (0)	5/27 (0)	6/27 (0)	**12/27**
	3/27	**12/27**	**12/27**	

Obs: já sabemos que não são independentes $\text{cov}(X, Y) \neq 0$

$$E(X_1) = -1{,}5 \cdot \frac{3}{27} - 0{,}5 \cdot \frac{12}{27} + 0 \cdot \frac{12}{27} = -\frac{10{,}5}{27}$$

$$E(X_1^2) = 1{,}5^2 \cdot \frac{3}{27} + 0{,}5^2 \cdot \frac{12}{27} + 0^2 \cdot \frac{12}{27} = \frac{9{,}75}{27}$$

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 =$$

$$= \frac{9{,}75}{27} - \left(\frac{10{,}5}{27}\right)^2 \cong 0{,}21$$

$$E(X_1 X_2) = -2{,}25 \cdot \frac{1}{27} - 3 \cdot \frac{1}{27} - 0{,}75 \cdot \frac{6}{27} - 1 \cdot \frac{5}{27}$$

$$= -\frac{14{,}75}{27}$$

$$E(X_2) = 0 \cdot \frac{3}{27} + 1{,}5 \cdot \frac{12}{27} + 2 \cdot \frac{12}{27} = \frac{42}{27} = \frac{14}{9}$$

$$E(X_2^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{27} + 1{,}5^2 \cdot \frac{12}{27} + 2^2 \cdot \frac{12}{27} = \frac{75}{27}$$

$$Var(X_2) = \frac{75}{27} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \cong 0{,}36$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) =$$

$$= -\frac{14{,}75}{27} - \left(-\frac{10{,}5}{27}\right)\frac{14}{9} = \frac{14{,}25}{243} \cong 0{,}059$$

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} = \frac{0{,}059}{\sqrt{0{,}21}\sqrt{0{,}36}} \cong 0{,}22$$