MAE 0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística I
Gabarito Lista de Exercícios 7

Segundo Semestre de 2017

EXERCÍCIO 1

(a) Seja X o número de clientes inadimplentes entre os 250 que fizeram a compra a prestação. Temos que $X \sim \text{Bin}(250; 0,08)$. Logo, o número esperado de inadimplentes dentre esses clientes é dado por

$$\mathbb{E}(X) = 250 \times 0,08 = 20. \tag{1}$$

(b) Temos que $\mathbb{E}(X) = 20$ e $Var(X) = 250 \times 0,08 \times 0,92 = 18,4$. Usando a aproximação da binomial pela normal e a correção pela continuidade, segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 20) \approx \mathbb{P}(Y \geq 20 - 1/2) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 20}{\sqrt{18,4}} \geq \frac{19,5 - 20}{\sqrt{18,4}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}(Z \geq -0,12) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq 0,12) = 0,5478, \qquad (2)
\end{aligned}$$

em que $Y \sim N(20; 18,4)$ e Z uma normal padrão. Assim, a probabilidade de que no mínimo 20 desses clientes tornem-se inadimplentes é dada aproximadamente por $0,5478$.

EXERCÍCIO 2

(a) Seja X o número de *itens x* com defeito na caixa de Seu João. Temos que $X \sim \text{Bin}(48; 0,1)$. Assim, a probabilidade de que Seu João tenha seu direito violado ao encontrar 8 *itens x* avariados é dada por

$$\mathbb{P}(X = 8) = \binom{48}{8} 0,1^8 0,9^{40} \approx 0,0558. \tag{3}$$

Por outro lado, temos que $\mathbb{E}(X) = 48 \times 0,1 = 4,8$ e $Var(X) = 48 \times 0,1 \times 0,9 = 4,32$, donde segue que a probabilidade aproximada do evento descrito acima pela aproximação da binomial pela normal com a correção pela continuidade é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=8) \approx \mathbb{P}(8-1/2 \leq Y \leq 8+1/2) &= \mathbb{P}\left(\frac{7,5-4,8}{\sqrt{4,32}} \leq \frac{Y-4,8}{\sqrt{4,32}} \leq \frac{8,5-4,8}{\sqrt{4,32}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(1,3 \leq Z \leq 1,78\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq 1,78\right) - \mathbb{P}\left(Z < 1,3\right) \\
&= 0,9625 - 0,9032 = 0,0593, \qquad (4)
\end{aligned}$$

em que $Y \sim N(4,8; 4,32)$ e Z uma normal padrão. O erro absoluto entre a probabilidade exata e a probabilidade obtida com a aproximação da binomial pela normal com a correção pela continuidade é de $|0,0558 - 0,0593| = 0,0035$; um valor pequeno. Nesse sentido, podemos dizer que a aproximação é boa, o que já era esperado uma vez que $48 \times 0,1 \times 0,9 = 4,32 > 3$ (observação vista em aula).

(b) Pelo enunciado, sabemos que se o número de *itens* x avariados na caixa de Seu João for maior que 4, ele deixará de ser cliente da produtora. Assim, pela aproximação da binomial pela normal com a correção pela continuidade, a probabilidade de interesse é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 4) = \mathbb{P}(X \geq 5) \approx \mathbb{P}(Y \geq 5 - 1/2) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y-4,8}{\sqrt{4,32}} \geq \frac{4,5-4,8}{\sqrt{4,32}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(Z \geq -0,14\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq 0,14\right) = 0,5557, \qquad (5)
\end{aligned}$$

em que $Y \sim N(4,8; 4,32)$ e Z uma normal padrão.

EXERCÍCIO 3

(a) Seja X o número de motoristas alcoolizados entre os 240 parados pela operação policial. Temos que $X \sim \text{Bin}(240; 0,15)$ com $\mathbb{E}(X) = 240 \times 0,15 = 36$ e $Var(X) = 240 \times 0,15 \times 0,85 = 30,6$. Assim, pela aproximação da binomial pela normal com a correção pela continuidade,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 50) \approx \mathbb{P}\left(Y \geq 50 - 1/2\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y-36}{\sqrt{30,6}} \geq \frac{50-1/2-36}{\sqrt{30,6}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(Z \geq 2,44\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Z < 2,44\right) \\
&= 1 - 0,9927 = 0,0073, \qquad (6)
\end{aligned}$$

em que $Y \sim N(36; 30,6)$ e Z uma normal padrão. Assim, a probabilidade de ao menos 50 desses motoristas estarem alcoolizados vale aproximadamente $0,0073$.

(b) Usando a aproximação da binomial pela normal e a correção pela continuidade,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(19 \leq X \leq 52) \approx \mathbb{P}(19 - 1/2 \leq Y \leq 52 + 1/2) &= \mathbb{P}\left(\frac{18,5 - 36}{\sqrt{30,6}} \leq \frac{Y - 36}{\sqrt{30,6}} \leq \frac{52,5 - 36}{\sqrt{30,6}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(-3,16 \leq Z \leq 2,98\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq 2,98\right) - \mathbb{P}\left(Z < -3,16\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq 2,98\right) - \left[1 - \mathbb{P}\left(Z \leq 3,16\right)\right] \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq 2,98\right) + \mathbb{P}\left(Z \leq 3,16\right) - 1 \\
&= 0,9986 + 0,9992 - 1 = 0,9978, \qquad (7)
\end{aligned}$$

com $Y \sim N(36; 30,6)$ e Z uma normal padrão. Assim, a probabilidade de no mínimo 19 e no máximo 52 desses motoristas estarem alcoolizados é dada aproximadamente por $0,9978$.

EXERCÍCIO 4

(a) Denotemos por X o número de exemplares de mogno brasleiro, dentre esses 1000 selecionados ao acaso, que sofrerão com os impactos da extração de madeira clandestina. Note que $X \sim \text{Bin}(1000; 0,1)$. Logo, o número esperado de exemplares de mogno brasileiro, dentro dessa amostra aleatória de tamanho 1000, que sofrerão com os impactos da atividade ilegal em questão é dado por

$$\mathbb{E}(X) = 1000 \times 0,1 = 100. \qquad (8)$$

(b) Temos que $\mathbb{E}(X) = 100$ e $Var(X) = 1000 \times 0.1 \times 0.9 = 90$. Utilizando a aproximação da binomial pela normal com a correção pela continuidade, temos que a probabilidade de que dentre os 1000 exemplares do item anterior, no máximo 85 sejam vítimas da extração de madeira clandestina, é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X \leq 85\right) \approx \mathbb{P}\left(Y \leq 85 + 1/2\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 100}{\sqrt{90}} \leq \frac{85 + 1/2 - 100}{\sqrt{90}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(Z \leq -1,53\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Z < 1,53\right) \approx 1 - 0,937 = 0,063, \qquad (9)
\end{aligned}$$

em que $Y \sim N(100; 90)$ e Z uma normal padrão.