MAE0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística I

2º semestre de 2017

Gabarito da Lista de Exercícios 6 - Variáveis Contínuas e Distribuição Normal - CASA

Exercício 1

(a) Para verificar se $f(x) = 7x/3, 0 < x < 1$ é uma função densidade de probabilidade (fdp) devemos verificar que se $f(x) \geq 0$, para todo $0 < x < 1$ e se a área definida por $f(x)$ é igual a 1. Dessa forma, claramente vemos que $f(x) = 7x/3 \geq 0$ para todo $0 < x < 1$. Agora, a área definida por $f(x)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^1 \frac{7x}{3}dx \\
&= \frac{7}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{7}{3}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \\
&= \frac{7}{6} \\
&\neq 1.
\end{aligned}$$

Portanto, nesse caso, $f(x)$ não é uma função densidade de probabilidade.

(b) Veja que $f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} \geq 0$ para todo $x \geq 0$, lembrando que a função exponencial é sempre postiva para todo x. Agora, a área definida por $f(x)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2x}dx \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big|_{x=0}^{x=\infty} \\
&= -[\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2\times 0}] \\
&= -[0-1] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, nesse caso, $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

(c) Temos que $f(x) = (2+x)/4$, se $-2 \leq x < 0$ e $f(x) = (2-x)/4$, se $0 \leq x \leq 2$. Assim, veja que quando $-2 \leq x < 0 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow (2+x)/4 \geq 0$ para todo $-2 \leq x < 0$. Também, note que quando $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow (2-x)/4 \geq 0$. Já , a área definida por $f(x)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-2}^{0} \frac{2+x}{4}dx + \int_{0}^{2} \frac{2-x}{4}dx \\
&= \frac{1}{4}\left[2x + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-2}^{x=0}\right] + \frac{1}{4}\left[2x - \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(2\times 0 + \frac{0^2}{2}\right) - \left(2\times(-2) + \frac{(-2)^2}{2}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\left(2\times 2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2\times 0 - \frac{0^2}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}(4-2) + \frac{1}{4}(4-2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Exercício 2

Sabemos que para a função $f(x) = c(1-x^2)$, com $-1 \leq x \leq 1$ seja uma função densidade de probabilidade, devemos ter que $f(x) = c(1-x^2) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$ para todo $-1 \leq x \leq 1$ pois $1 - x^2 \geq 0$ para todo $-1 \leq x \leq 1$. Ainda, devemos ter que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} c(1-x^2)dx = 1 \\
1 &= c\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx \\
1 &= c\left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1}\right] \\
1 &= c\left[\left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right] \\
1 &= c\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right] \\
c &= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Exercício 3

Sabemos que $f(x) = 8/x^3, x > 2$. Seja $W = (1/3)X$. Assim, pela definição de esperança de uma variável alaeatória contínua temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{2}^{\infty} x\frac{8}{x^3}dx \\
&= 8\int_{2}^{\infty} x^{-2}dx \\
&= 8\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_{x=2}^{x=\infty}\right] \\
&= -8\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right] \\
&= -8[0 - 1/2] \\
&= 4.
\end{aligned}$$

E utilizando propriedade de esperança, temos que $\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}((1/3)X) = (1/3)\mathrm{E}(X) = (1/3)4 = 4/3$.

Exercício 4

Definamos X como sendo a variável aleatória que representa o tempo necessário (em minutos) para o medicamento contra dor fazer efeito. Nesse caso, $X \sim \mathrm{U}[5, 15]$. Assim, a fdp é dada por $f(x) = 1/(15-5) = 1/10, 5 \leq x \leq 15$. Um paciente, que esteja sofrendo de dor, recebe o remédio.

(a) A probabilidade da dor cessar em até 10 minutos é obtida de

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leq 10) &= \int_5^{10} \frac{1}{10} dx \\ &= \frac{1}{10} x \Big|_{x=5}^{x=10} \\ &= \frac{1}{10}(10-5) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Este item também poderia ser resolvido usando a função de distribuição acumulada de X que é dada por $F(x) = (x-5)/(15-5) = (x-5)/10, 5 \leq x \leq 15$. Assim, $\mathrm{P}(X \leq 10) = F(10) = (10-5)/10 = 1/2$.

(b) A probabilidade da dor durar mais de 7 minutos sabendo-se que durou menos de 10 é obtida de

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 7 | X < 10) &= \frac{\mathrm{P}(7 < X < 10)}{\mathrm{P}(X < 10)} \\ &= \frac{\int_7^{10} \frac{1}{10} dx}{1/2} \\ &= \frac{(1/10)x \Big|_{x=7}^{x=10}}{1/2} \\ &= 2 \frac{1}{10}(10-7) \\ &= \frac{6}{10}. \end{aligned}$$

(c) O tempo médio necessário para o medicamente fazer efeito.

Como sabemos, a média de uma variável aleatória que tem distribuição $\mathrm{U}[a, b]$ é $(a+b)/2$. Assim, o tempo médio necessário para o medicamento fazer efeito é $\mathrm{E}(X) = (5+15)/2 = 10$.

Também, podemos obter a média através de

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_5^{15} \frac{x}{10} dx \\
&= \frac{1}{10} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=5}^{x=15} \\
&= \frac{1}{20}(15^2 - 5^2) \\
&= \frac{225 - 25}{20} \\
&= 10.
\end{aligned}$$

Exercício 5

Seja X a variável aleatória que representa o tempo de vida (em mil horas) de um mecanismo eletrônico. Supomos que X tenha distribuição exponencial com media igual a 3 mil horas, ou seja, $X \sim \mathrm{Exp}(1/3)$. Assim, a fdp de X é $f(x) = (1/3)\mathrm{e}^{-x/3}, x \geq 0$. Dessa forma, a probabilidade de um mecanismo escolhido ao acaso durar mais de 4 mil horas é obtida de

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 4) &= \int_4^{\infty} \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x/3} dx \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x/3} \times (-3) \Big|_{x=4}^{x=\infty} \\
&= -[\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x/3} - \mathrm{e}^{-4/3}] \\
&= \mathrm{e}^{-4/3} \\
&\approx 0,2636.
\end{aligned}$$

Outra forma simples de resolver esse problema seria utilizar o fato de que a função de distribuição acumulada de X é $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/3}, x \geq 0$. Assim, $\mathrm{P}(X > 4) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - [1 - \mathrm{e}^{-4/3}] \approx 0,2636$.

Exercício 6

Supomos que a variável aleatória X tenha distribuição N(2; 0,16). Assim, sabemos que $Z = (X-2)/\sqrt{0,16} \sim \mathrm{N}(0,1)$. Utilizando a Tabela da distribuição normal padrão que apresenta a probabilidade $A(z) = \mathrm{P}(Z \leq z)$.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geq 2,3) &= 1 - \mathrm{P}(X < 2,3) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{X-2}{\sqrt{0,16}} < \frac{2,3-2}{\sqrt{0,16}}\right) \\
&= 1 - \mathrm{P}(Z < 0,75) \\
&= 1 - A(0,75) \\
&= 1 - 0,7734 \\
&= 0,2266,
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(1,8 \leq X \leq 2,1) &= \mathrm{P}\left(\frac{1,8-2}{\sqrt{0,16}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{0,16}} \leq \frac{2,1-2}{\sqrt{0,16}}\right) \\
&= \mathrm{P}(-0,5 \leq Z \leq 0,25) \\
&= \mathrm{P}(Z \leq 0,25) - \mathrm{P}(Z \leq -0,5) \\
&= \mathrm{P}(Z \leq 0,25) - \mathrm{P}(Z \geq 0,5) \text{ (por simetria)} \\
&= \mathrm{P}(Z \leq 0,25) - [1 - \mathrm{P}(Z \leq 0,5)] \\
&= A(0,25) - [1 - A(0,5)] \\
&= 0,5987 - [1 - 0,6915] \\
&= 0,2902.
\end{aligned}$$

Nesse item, usamos a simetria da distribuição normal, $\mathrm{P}(Z \geq z) = \mathrm{P}(Z \leq -z)$.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geq 2) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-2}{\sqrt{0,16}} \geq \frac{2-2}{\sqrt{0,16}}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z \geq 0) \\
&= 1 - \mathrm{P}(Z < 0) \\
&= 1 - A(0) \\
&= 1 - 0,5.
\end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geq -2,16) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-2}{\sqrt{0,16}} \geq \frac{-2,16-2}{\sqrt{0,16}}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z \geq -10,4) \\
&= \mathrm{P}(Z \leq 10,4) \text{ (por simetria)} \\
&= A(10,4) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Exercício 7

Seja X a variável aleatória que representa o peso (em kg) de pacientes adultos de uma clínica de emagrecimento. Sabemos que $X \sim \mathrm{N}(130,(20)^2)$. Para efeito de determinar o tratamento mais adequado, os 25% pacientes de menor peso são classificados como magros, enquanto que os 25% de maior peso de obesos.

Denotemos por M e O os valores que delimitam as classificações dos pacientes magros e obesos, respectivamente. Obtemos tais valores a partir de

$$\mathrm{P}(X \leq M) = 0,25 \quad \text{e} \quad \mathrm{P}(X \geq O) = 0,25.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq M) &= 0,25 \\
\mathrm{P}\left(\frac{X-130}{20} \leq \frac{M-130}{20}\right) &= 0,25 \\
\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{M-130}{20}\right) &= 0,25.
\end{aligned}
$$

Então, M é obtido tal que $(M-130)/20 = z_{0,25}$ com $\mathrm{P}(Z \leq z_{0,25}) = 0,25$. Utilizando uma Tabela da distribuição Normal temos que $z_{0,25} = -0,67$, assim, $M = 130 - 0,67 \times 20 = 116,6$.

Agora,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geq O) &= 0,25 \\
\mathrm{P}\left(\frac{X-130}{20} \geq \frac{O-130}{20}\right) &= 0,25 \\
\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{O-130}{20}\right) &= 0,25 \\
\mathrm{P}\left(Z < \frac{O-130}{20}\right) &= 0,75.
\end{aligned}
$$

Então, O é obtido tal que $(O-130)/20 = z_{0,75}$ com $\mathrm{P}(Z < z_{0,75}) = 0,75$. Utilizando uma Tabela da distribuição Normal temos que $z_{0,75} = 0,67$, assim, $M = 130 + 0,67 \times 20 = 143,4$.

Exercício 8

Seja X a variável aleatória que representa o tempo médio para se fazer um teste padrão de matemática. Sabemos que X é aproximadamente normal com média de 65 minutos e desvio-padrão de 15 minutos.

(a) A porcentagem de candidatos que levará menos de 65 minutos para finalizar o teste é obtida de

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X < 65) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-65}{15} < \frac{65-65}{15}\right) \\
&\approx \mathrm{P}(Z < 0) \\
&= A(0) \\
&= 0,5.
\end{aligned}$$

Assim, aproximadamente 50% dos candidatos levará menos de 65 minutos para terminar o teste.

(b) A porcentagem de candidatos que não terminará o teste, se o tempo máximo concedido for 1 hora e 40 minutos é obtida de

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 100) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-65}{15} > \frac{100-65}{15}\right) \\
&\approx \mathrm{P}(Z > 2,33) \\
&= 1 - \mathrm{P}(Z < 2,33) \\
&= 1 - A(2,33) \\
&= 1 - 0,99010 \\
&= 0,0099.
\end{aligned}$$

Assim, aproximadamente 0,99% dos candidatos não terminará o teste, se o tempo máximo concedido for 1 hora e 40 minutos.

(c) Se 500 pessoas fizerem o teste, o número de pessoas (aproximadamente) o terminarão em menos de 30 minutos é obtido de $\mathrm{P}(X < 30) \times 500$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X < 30) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-65}{15} < \frac{30-65}{15}\right) \\ &\approx \mathrm{P}(Z < -2,33) \\ &= \mathrm{P}(Z > 2,33) \\ &= 1 - A(2,33) \\ &= 0,0099. \end{aligned}$$

Assim, o número de pessoas que terminarão o teste em menos de 30 minutos é de $0,0099 \times 500 = 4,95 \approx 5$.