

# Aula 4. NOÇÕES DE PROBABILIDADE

? CARA ? OU ? COROA ?



**? Qual será o rendimento da Caderneta de Poupança até o final deste ano ?**

**?? E qual será a taxa de inflação acumulada em 2013??**

**?? Quem será o próximo prefeito de São Paulo ??**

**Experimento Aleatório:** é aquele que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

### Exemplos:

1. Lançar uma moeda e observar o resultado; lançar um dado e observar o resultado.
2. Sortear um estudante da USP e perguntar se ele é fumante ou não.
3. Sortear um doador de sangue cadastrado e verificar o seu tipo sangüíneo.

**Espaço Amostral ( $\Omega$ ):** conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

### Exemplos:

1. Lançamento de um dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Doador de sangue (tipo sangüíneo) .

$$\Omega = \{A, B, AB, O\}$$

3. Hábito de fumar.

$$\Omega = \{\text{Fumante}, \text{Não fumante}\}$$

4. Tempo de duração de uma lâmpada.

$$\Omega = \{t: t \geq 0\}$$

**Eventos:** subconjuntos do espaço amostral  $\Omega$

Notação:  $A, B, C, \dots$

$\emptyset$  (conjunto vazio): ***evento impossível***

$\Omega$ : ***evento certo***

**Exemplo:** Lançamento de um dado.

Espaço amostral:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

$A$ : sair face par  $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

$B$ : sair face maior que 3  $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

$C$ : sair face 1  $\Rightarrow C = \{1\} \subset \Omega$

# Operações com eventos

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostral.

**$A \cup B$ : união dos eventos  $A$  e  $B$ .**

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos,  $A$  ou  $B$ .

**$A \cap B$ : interseção dos eventos  $A$  e  $B$ .**

Representa a ocorrência simultânea dos eventos  $A$  e  $B$ .

- $A$  e  $B$  são **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \emptyset$$

- $A$  e  $B$  são **complementares** se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

O **complementar** de  $A$  é representado por  $A^c$ .

## Exemplo: Lançamento de um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eventos:  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{4, 5, 6\}$  e  $C = \{1\}$

- sair uma face par e maior que 3

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

- sair uma face par e face 1

$$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \emptyset$$

- sair uma face par ou maior que 3

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

- sair uma face par ou face 1

$$A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$$

- não sair face par

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

# Probabilidade

- Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório

*Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?*

Várias abordagens possíveis:

1. Frequências relativas de ocorrências de cada resultado;
2. Suposições teóricas;
3. Experiência de um(a) especialista;

# Atribuição da probabilidade:

## 1. Através das frequências relativas de ocorrências.

- O experimento aleatório é replicado muitas vezes
- Registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre.

→ Para um número grande de replicações, a frequência relativa aproxima a probabilidade.

## 2. Através de suposições teóricas.

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

$$P(\text{face } 1) = \dots = P(\text{face } 6) = 1/6.$$

### 3. Através da experiência de um(a) especialista.

Exemplo: Após o exame clínico, o médico externa a probabilidade do paciente estar com sinusite viral ou bacteriana.

No **caso discreto**, todo experimento aleatório tem seu **modelo probabilístico** especificado quando estabelecemos:

- O espaço amostral  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$
- A probabilidade  $P(w)$  para cada ponto amostral de tal forma que:

$$0 \leq P(w_i) \leq 1 \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(w_i) = 1.$$

e a Regra

$$P(A) = \sum_{w_j \in A} P(w_j)$$

- Exemplo: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados são iguais , tem-se :

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de elementos de } A}{n^{\circ} \text{ de elementos de } \Omega}$$

**Exemplo:** A tabela a seguir apresenta a distribuição de alunos diplomados em 2002, segundo nível de ensino e tipo de instituição, no município de São Paulo.

| Nível       | Instituição |         | Total   |
|-------------|-------------|---------|---------|
|             | Pública     | Privada |         |
| Fundamental | 144.548     | 32.299  | 176.847 |
| Médio       | 117.945     | 29.422  | 147.367 |
| Superior    | 5.159       | 56.124  | 61.283  |
| Total       | 267.652     | 117.845 | 385.497 |

Fonte: Min. Educação/INEP-Inst.Nacion. Estudos e Pesq. Educacionais; Fundação SEAD

Um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

$\Omega$ : conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Definimos os eventos

$M$ : aluno se formou no ensino médio;

$F$ : aluno se formou no ensino fundamental;

$S$ : aluno se formou no ensino superior;

$G$ : aluno se formou em instituição pública.

[ir para a tabela](#)

Temos

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0,382$$

$$P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0,459$$

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0,159$$

$$P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0,694$$

- Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio e numa instituição pública?

- $M \cap G$ : aluno formado no ensino médio **e** em inst.pública

$$P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$$

- Qual é a probabilidade do aluno ter se formado no ensino médio ou numa instituição pública?

[ir para a tabela](#)

$M \cup G$ : aluno formado no ensino médio **ou** em inst. pública

$$\begin{aligned} P(M \cup G) &= (147.367 + 267.652 - 117.945) / 385.497 \\ &= \frac{297.074}{385.497} = 0,771 \end{aligned}$$

# Regra da adição de probabilidades

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de  $\Omega$ . Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Casos particulares:

- Se  $A$  e  $B$  forem *eventos disjuntos*, então
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Para qualquer evento  $A$  de  $\Omega$ ,
$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

# PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

**Probabilidade condicional:** Dados dois eventos  $A$  e  $B$ , a probabilidade condicional de  $A$  dado que ocorreu  $B$  é denotada por  $P(A | B)$  e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a **regra do produto de probabilidades**

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B).$$

e

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A).$$

- Qual é a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?

Olhando diretamente a tabela,

$$\text{temos } P(M|G) = \frac{117.945}{267.652} = 0,441$$

Pela **definição**,

$$P(M \mid G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{117.945}{385.497}}{\frac{267.652}{385.497}} = 0,441$$

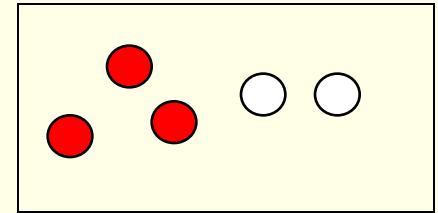
[ir para a tabela](#)

**Exemplo:** Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.

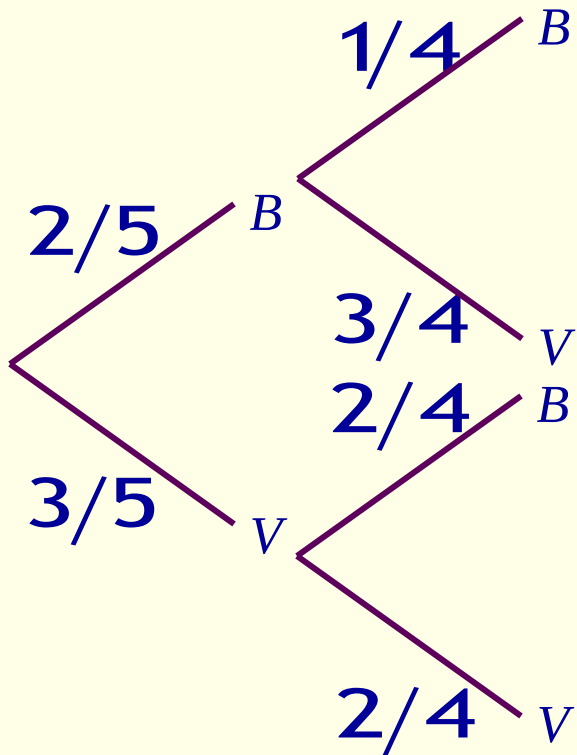
A: 2ª. bola sorteada é branca

C: 1ª. bola sorteada é branca

$P(A) = ???$



Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como *diagrama de árvores* ou *árvore de probabilidades*.



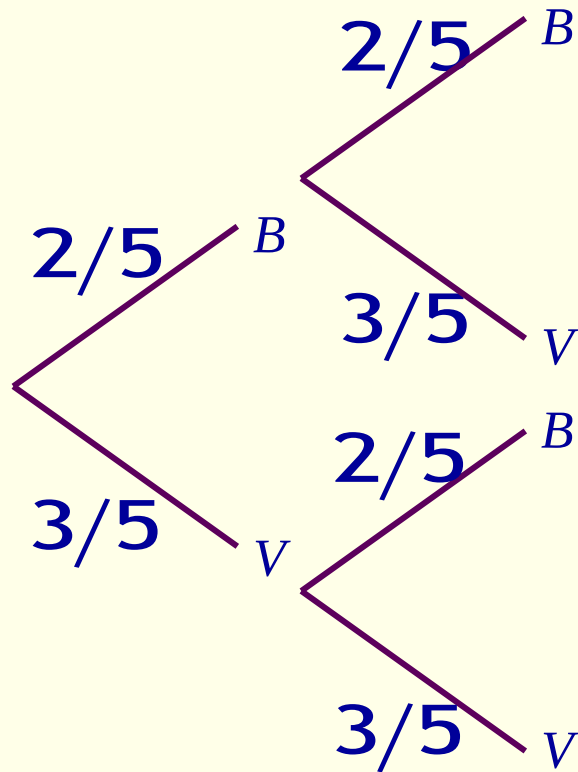
| Resultados | Probabilidades                                  |
|------------|-------------------------------------------------|
| $BB$       | $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$ |
| $BV$       | $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ |
| $VB$       | $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ |
| $VV$       | $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ |
| Total      | 1                                               |

Temos

$$P(A) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5} \quad e$$

$$P(A|C) = \frac{1}{4} .$$

Considere agora que as extrações são feitas **com reposição**, ou seja, a 1ª. bola sorteada é repostada na urna antes da 2ª. extração. Nesta situação, temos



| Resultados | Probabilidade                                   |
|------------|-------------------------------------------------|
| $BB$       | $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ |
| $BV$       | $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ |
| $VB$       | $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ |
| $VV$       | $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ |
| Total      | 1                                               |

Neste caso,

$$P(A) = P(\text{branca na 2ª.}) = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{5} \quad \text{e}$$

$$P(A \mid C) = P(\text{branca na 2ª.} \mid \text{branca na 1ª.}) = \frac{2}{5} = P(A)$$

$$P(A \mid C^c) = P(\text{branca na 2ª.} \mid \text{vermelha na 1ª.}) = \frac{2}{5} = P(A)$$

ou seja, o resultado na 2ª. extração ***independe*** do que ocorre na 1ª. extração.

## Independência de eventos:

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de  $B$  não altera a probabilidade de ocorrência de  $A$ , isto é,

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Temos a seguinte forma equivalente:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) .$$

**Exemplo:** A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é  $1/3$  e a de Madalena é  $2/3$ . Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

$A$ : Jonas é aprovado

$B$ : Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$$

→ Qual foi a suposição feita?