Exercício 1

Supor que (X,Y) tem função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2y & y \in (0,2), x \in (0,1) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Verifique se f(x,y) é realmente a função da densidade.

b) Encontre as funções de densidade de probabilidade marginais de X e Y e verifique se X e Y são independentes.

c) Calcule $P(X > 1/2, Y < 1)$.

d) Obtenha as funções de densidade de probabilidade condicionais $X|y$e $Y|x$.

e) Calcule $\mathrm{E}(X|Y = y)$ e $\mathrm{E}(Y|X = x)$.

Solução

a) Observe inicialmente que para $x \in (0,1)$, $y \in (0,2)$ temos,

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2y \geq 0.$$

E caso contrário, f(x,y)=0.

Portanto, $f(x,y) \geq 0$. E note que,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \frac{3}{2}x^2ydydx &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{3}{2}x^2ydy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^2\right)dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}x^2\left(\frac{2^2}{2} - 0\right)\right]dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}x^2\left(\frac{4}{2}\right)\right]dx \\
&= \int_0^1 \left[3x^2\right]dx \\
&= 3\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = 1^3 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Concluímos que f(x,y) é realmente a função da densidade.

b) A função de densidade de probabilidade marginal de X é dada por,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \frac{3}{2}x^2 y dy = \frac{3}{2}x^2 \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^2 \\ &= \frac{3}{2}x^2\left(\frac{2^2}{2} - 0\right) = \frac{3}{2}x^2\left(\frac{4}{2}\right) \\ &= 3x^2,\ x \in (0,1) \end{aligned}$$

A função de densidade de probabilidade marginal de Y é dada por,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 y dx = \frac{3}{2}y\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^1 \\ &= \frac{3}{2}y\left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = \frac{3}{2}y\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}y,\ y \in (0,2) \end{aligned}$$

Logo,

$$f_X(x)f_Y(y) = 3x^2 \times \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}x^2 y = f(x,y),\ y \in (0,2), x \in (0,1).$$

e $f_X(x)f_Y(y) = 0$, se $y \notin (0,2)$ou $x \notin (0,1)$. Portanto,

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 y & y \in (0,2), x \in (0,1) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = f(x,y)$$

para todo par (x,y). Então, as variáveis X e Y são ditas independentes.

c) Temos que

$$\begin{aligned} P(X > 1/2, Y < 1). &= \int_{1/2}^1 \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 y dy dx = \int_{1/2}^1 \left(\int_0^1 \frac{3}{2}x^2 y dy\right) dx = \int_{1/2}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^1\right) dx \\ &= \int_{1/2}^1 \left[\frac{3}{2}x^2\left(\frac{1^2}{2} - 0\right)\right] dx = \int_{1/2}^1 \left[\frac{3}{2}x^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] dx \\ &= \int_{1/2}^1 \left[\frac{3}{4}x^2\right] dx = \frac{3}{4}\frac{x^3}{3}\bigg|_{1/2}^1 = \\ &= \frac{1}{4}\left[1^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{4}\left[1^3 - \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{4}\frac{7}{8} \\ &= \frac{7}{32} \end{aligned}$$

d) Como X e Y são variáveis aleatórias independentes então as funções de densidade de probabilidade condicionais $X|y$e $Y|x$ são iguais a $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ respectivamente.

Com efeito, do item b temos que $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$ para todo par (x,y) logo, a função de densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y_0$ é dada por,

$$f(X|y_0) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{f_X(x)f_Y(y_0)}{f_Y(y_0)} = f_X(x).$$

Analogamente provamos que, $f(Y|x_0) = f_Y(y)$.

e) Vamos agora determinar $E(X|Y = y)$. Usando o item d temos que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x3x^2dx = \int_0^1 3x^3dx \\
&= 3\frac{x^4}{4}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{3}{4}\left(1^4 - 0\right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Vamos determinar $E(Y|X = x)$. Usando o item d temos que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int_0^2 y f_Y(y)dy = \int_0^2 y\frac{1}{2}ydy = \int_0^2 \frac{1}{2}y^2dy \\
&= \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\bigg|_{y=0}^{2} = \frac{1}{6}\left(2^3 - 0\right) \\
&= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Exercício 2

Supor que a distribuição conjunta do tempo de duração (X,Y) de dois componentes eletrônicos é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{se } x,y > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Encontre as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y.

b) Calcule $P(0 < X < 1; 1 < Y < 2)$.

c) Obtenha $\rho(X,Y)$.

Solução

a) A função densidade de probabilidade marginal de X é dada por,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty e^{-(x+y)}dy = e^{-x}\left[-e^{-y}\Big|_{y=0}^{\infty}\right] \\
&= e^{-x}\left[\lim_{y\to\infty} - e^{-y} + e^0\right] \\
&= e^{-x}\,[0+1] = e^{-x},\ x > 0.
\end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade marginal de Y é dada por,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dx = e^{-y}\left[-e^{-x}\Big|_{x=0}^{\infty}\right] \\ &= e^{-y}\left[\lim_{x\to\infty} - e^{-x} + e^{0}\right] \\ &= e^{-y}\left[0+1\right] = e^{-y},\ y > 0. \end{aligned}$$

b) Temos que,

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1; 1 < Y < 2) &= \int_1^2 \int_0^1 e^{-(x+y)}dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^1 e^{-(x+y)}dx\right]dy \\ &= \int_1^2 \left\{e^{-y}\left[-e^{-x}\Big|_{x=0}^{1}\right]\right\}dy \\ &= \int_1^2 e^{-y}\left[-e^{-1}+e^{0}\right]dy \\ &= \int_1^2 e^{-y}\left[-e^{-1}+1\right]dy - e^{-y}\left[-e+1\right]\Big|_{y=1}^{2} = \left[-e^{-2}+e^{-1}\right]\left[-e^{-1}+1\right] \\ &= e^{-3} - e^{-2} - e^{-2} + e^{-1} \approx 0.147. \end{aligned}$$

Solução alternativa: Do item (a) temos; $f_X(x) = e^{-x},\ x > 0$ e $f_Y(y) = e^{-y},\ y > 0$ logo,

$$f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}e^{-y} = e^{-(x+y)} = f(x,y),\ x,y > 0.$$

Portanto, X e Y são independentes. Note ainda que X~Exp(1) e Y~Exp(1). Logo,

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1; 1 < Y < 2) &= P(0 < X < 1)P(1 < Y < 2) = \int_0^1 e^{-x}dx \int_1^2 e^{-y}dy \\ &= \left[e^{-0} - e^{-1}\right]\left[e^{-1} - e^{-2}\right] = e^{-1} - e^{-2} - e^{-2} + e^{-3} \\ &\approx 0.147. \approx 0.147. \end{aligned}$$

c) Como vimos no item anterior X e Y são variáveis independentes logo, $\text{Cov}(X,Y) = 0$ e $\rho(X,Y) = 0$.

Solução alternativa: Do item a) segue que

$$f_X(x) = e^{-x},\ x > 0.$$

Logo, X~Exp(1) de onde segue que

$$E(X) = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \frac{1}{1} = 1. \tag{1}$$

Analogamente temos que, Y~Exp(1) e

$$E(Y) = \int_0^{\infty} ye^{-y}dy = \frac{1}{1} = 1. \tag{2}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-(x+y)}dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} xye^{-(x+y)}dx\right]dy = \int_0^{\infty} ye^{-y}\left[\int_0^{\infty} xe^{-x)}dx\right]dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando 1 em 3 segue que,

$$\mathrm{E}(XY) = \int_0^{\infty} ye^{-y}1dy. \quad (4)$$

Aplicando 2 em 4 segue que,

$$\mathrm{E}(XY) = 1. \quad (5)$$

Logo, usando 1, 2 e 5 temos,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 1 - 1 \times 1 = 0$$

Portanto, $\rho(X,Y) = 0$.

Exercício 3

Supomos que (X,Y) uniformemente distribuído em retângulo $Q = (x,y) : x \in [0,1], y \in [0,2]$, o que significa que a função densidade de probabilidade conjunta de (X,Y) é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Encontre c.

b) Encontre as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y.

c) Obtenha as funções densidade de probabilidade condicionais X—y e Y—x.

d Como ficam $E(X|y)$ e $E(Y|x)$?

Solução

a) Queremos determinar c de tal forma que,

$$\int_0^1\int_0^2 cdydx = 1.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^2 cdydx &= \int_0^1 c\left[y\Big|_0^2\right]dx = \int_0^1 c\,[2-0]\,dx \\ &= 2 \times c\left[x\Big|_0^1\right] = 2c \times 1 = 2c \end{aligned}$$

Queremos 2c=1 logo, c=1/2

b) A função marginal de X é dada por,

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_0^2 \frac{1}{2} dy &= \frac{1}{2}\left[y\Big|_0^2 \right] = \frac{1}{2}[2-0] \\ &= 1,\ \text{se } x \in [0,1] \end{aligned}$$

A função marginal de Y é dada por,

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{2} dx &= \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2}[1-0] \\ &= \frac{1}{2},\ \text{se } y \in [0,2] \end{aligned}$$

c) Note que

$$f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}\ y \in (0,2), x \in (0,1).$$

e $f_X(x) f_Y(y) = 0$, se $y \notin (0,2)$ou $x \notin (0,1)$. Portanto,

$$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = f(x,y)$$

para todo par (x,y). Então, as variáveis X e Y são ditas independentes. Portanto, as funções densidade de probabilidade condicionais $X|y$ e $Y|x$ são dadas respectivamente por, $f_X(x) = 1,$ se $x \in [0,1]$ e $f_Y(y) = \frac{1}{2},$ se $y \in [0,2]$.

d) Do fato que X e Y são independentes segue que E($X|Y = y$) = E(X). Do item (a) temos, $f_X(x) = 1,$ se $x \in [0,1]$ logo, X~U[0,1] e portanto, E(X) = $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

Do fato que X e Y são independentes segue que E($Y|X = x$) = E(Y). Do item (a) temos, $f_Y(y) = \frac{1}{2},$ se $y \in [0,2]$. logo, Y~U[0,2] e portanto, E(X) = $\frac{2+0}{2} = 1$.

Solução alternativa: Vamos agora determinar $E(X|Y = y)$. Usando o item c temos que,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2}\left(1^2 - 0\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vamos determinar $E(Y|X = x)$. Usando o item c temos que,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \int_0^2 y f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{1}{2} y dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^2 = \frac{1}{4}\left(2^2 - 0\right) \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$