MAE0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística I

2^o semestre de 2017

Gabarito da Lista de Exercícios 10 - Modelos Bidimensionais II - CASA

Exercício 1 Supondo que (X, Y) tem função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{64}(x+y), 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4.$$

(a) Para verificar se $f(x,y)$ é uma função densidade de probabilidade devemos ter

- $f(x,y) \geq 0$ para todo $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.
- $\int_0^4 \int_0^4 f(x,y)dxdy = 1$.

Assim, note que

$$\begin{aligned}
0 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y &\leq 4 \Rightarrow \\
x+y &\geq 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{64}(x+y) &\geq 0 \Rightarrow \\
f(x,y) &\geq 0.
\end{aligned}$$

E, também temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_0^4 f(x,y)dxdy &= \int_0^4 \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dxdy \\
&= \frac{1}{64}\int_0^4 \left[\left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_{x=0}^{x=4}\right] dy \\
&= \frac{1}{64}\int_0^4 \left[\left(\frac{4^2}{2} + 4y\right) - \left(\frac{0^2}{2} + y \times 0\right)\right] dy \\
&= \frac{1}{64}\int_0^4 \left[(8+4y)\right] dy \\
&= \frac{1}{64}\left[\left(8y + 4\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=4}\right] \\
&= \frac{1}{64}\left[\left(8 \times 4 + 2 \times 4^2\right) - \left(8 \times 0 + 2 \times 0^2\right)\right] \\
&= \frac{32+32}{64} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x,y)$ é uma função densidade de probabilidade.

(b) A função densidade marginal de X é obtida de

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^4 f(x,y)dy \\
&= \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dy \\
&= \frac{1}{64}\left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=4}\right] \\
&= \frac{1}{64}\left[\left(x\times 4+\frac{4^2}{2}\right)-\left(x\times 0+\frac{0^2}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{64}(4x+8) \\
&= \frac{1}{16}(x+2), \quad 0\leq x\leq 4.
\end{aligned}$$

Analogamente, a função densidade marginal de Y é obtida de

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^4 f(x,y)dx \\
&= \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)dx \\
&= \frac{1}{64}\left[\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_{x=0}^{x=4}\right] \\
&= \frac{1}{64}\left[\left(\frac{4^2}{2}+y\times 4\right)-\left(\frac{0^2}{2}+y\times 0\right)\right] \\
&= \frac{1}{64}(8+4y) \\
&= \frac{1}{16}(y+2), \quad 0\leq y\leq 4.
\end{aligned}$$

Por fim, se X e Y fossem independentes deveríamos ter $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y), 0\leq x\leq 4, 0\leq y\leq 4$. Mas veja que

$$\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) &= \frac{1}{16}(x+2)\frac{1}{16}(y+2) \\
&= \frac{1}{256}(xy+2(x+y)+4) \\
&\neq \frac{1}{64}(x+y), \text{ para todo } 0\leq x\leq 4, 0\leq y\leq 4.
\end{aligned}$$

Logo, X e Y não são independentes.

(c) A função densidade de probabilidade condicional de $X|Y=y$ é obtida de

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{(1/64)(x+y)}{(1/16)(y+2)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{y+2}\right), y \text{ fixo e } 0\leq x\leq 4.
\end{aligned}$$

Analogamente, a função densidade de probabilidade condicional de $Y|X=x$ é obtida de

$$\begin{aligned} f_{Y|X=x}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{(1/64)(x+y)}{(1/16)(x+2)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+2}\right), x \text{ fixo e } 0 \leq y \leq 4. \end{aligned}$$

Exercício 2 Supondo que X e Y sejam variáveis aleatórias com $\text{Var}(X)=1$, $\text{Var}(Y)=2$ e $\rho(X,Y)=1/2$. Obtemos $\text{Var}(X-2Y)$ a partir de

$$\begin{aligned} \text{Var}(X-2Y) &= \text{Var}(X)+\text{Var}(-2Y)+2\text{Cov}(X,-2Y) \\ &= \text{Var}(X)+(-2)^2\text{Var}(Y)-4\text{Cov}(X,Y) \\ &= \text{Var}(X)+4\text{Var}(Y)-4\text{Cov}(X,Y). \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que $\rho(X,Y) = \text{Cov}(X,Y)/[\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}]$, o que implica que $\text{Cov}(X,Y) = \rho(X,Y)\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} = (1/2)\sqrt{1\times 2} = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2} \cong 0,7071$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \text{Var}(X-2Y) &= 1+4\times 2-4\times 0,7071 \\ &= 6,1716. \end{aligned}$$

Exercício 3 Supor que a distribuição conjunta do tempo de duração (X,Y) de dois componentes eletrônicos é dada por

$$f(x,y)=\exp\{-(x+y)\}, x>0, y>0.$$

(a) A função densidade de probabilidade marginal de X é obtida de

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f(x,y)dy \\ &= \int_0^\infty \exp\{-(x+y)\}dy \\ &= (-1)\exp\{-(x+y)\}\Big|_{y=0}^{y=\infty} \\ &= -0-[-\exp\{-(x+0)\}] \\ &= \exp\{-x\}, x>0. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que essa integral também poderia ter sido calculada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_0^{\infty} \exp\{-(x+y)\}dy \\
&= \mathrm{e}^{-x}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}dy \\
&= \mathrm{e}^{-x}, x>0,
\end{aligned}
$$

em que $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}dy = 1$ pois esta é a integral de uma densidade exponencial de parâmetro 1. Note que $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. Analogamente, a função densidade de probabilidade marginal de Y é obtida de

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^{\infty} f(x,y)dx \\
&= \int_0^{\infty} \exp\{-(x+y)\}dx \\
&= (-1)\exp\{-(x+y)\}\Big|_{x=0}^{x=\infty} \\
&= -0-[-\exp\{-(0+y)\}] \\
&= \exp\{-y\}, y>0.
\end{aligned}
$$

Note que $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Observe que $f(x,y) = \exp\{-(x+y)\} = \exp\{-x\}\exp\{-y\} = f_X(x)f_Y(y), x>0, y>0$, isto é, X e Y são independentes.

(b) Temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(0<X<1, 1<Y<2) &= \int_1^2\int_0^1 f(x,y)dxdy \\
&= \int_1^2\int_0^1 \exp\{-(x+y)\}dxdy \\
&= \int_1^2 \left[(-1)\exp\{-(x+y)\}\Big|_{x=0}^{x=1}\right] dy \\
&= \int_1^2 \left[-\exp\{-(1+y)\}+\exp\{-y\}\right] dy \\
&= \left[\exp\{-(1+y)\}-\exp\{-y\}\Big|_{y=1}^{y=2}\right] \\
&= [\exp\{-(1+2)\}-\exp\{-2\}]-[\exp\{-(1+1)\}-\exp\{-1\}] \\
&= \mathrm{e}^{-3}-2\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1} \\
&= 0,1470.
\end{aligned}
$$

Também poderíamos ter calculado essa probabilidade usando a independencia entre X e Y pois

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(0 < X < 1, 1 < Y < 2) &= \mathrm{P}(0 < X < 1)\mathrm{P}(1 < Y < 2) \\
&= [F_X(1) - F_X(0)][F_Y(2) - F_Y(1)] \\
&= [1 - \mathrm{e}^{-1} - 1 + \mathrm{e}^{-0}][1 - \mathrm{e}^{-2} - 1 + \mathrm{e}^{-1}] \\
&= [1 - \mathrm{e}^{-1}][-\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1}] \\
&= \mathrm{e}^{-3} - 2\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} \\
&= 0,1470.
\end{aligned}$$

(c) Como $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ e $Y \sim \mathrm{Exp}(1) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 1$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$. Também, usando o fato que X e Y são independentes, já temos diretamente que $\rho(X,Y) = 0$.

Outra forma ainda usando a independência, é usar o fato de que $\mathrm{E}(XY) \overset{\text{ind}}{=} \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 1 \times 1 = 1$ e aplicando na fórmula da correlação

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{1 - 1 \times 1}{\sqrt{1 \times 1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sem usar o fato da independência, temos que

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}},
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^\infty \int_0^\infty xy \exp\{-(x+y)\} dx dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty xy \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-y} dx dy \\
&= \int_0^\infty y \mathrm{e}^{-y} \left[\int_0^\infty x \mathrm{e}^{-x} dx \right] dy \\
&= \int_0^\infty y \mathrm{e}^{-y} \left[\mathrm{E}(X) \right] dy \\
&= \int_0^\infty y \mathrm{e}^{-y} \left[1 \right] dy \\
&= \mathrm{E}(Y) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daí, aplicando na fórmula obtemos $\rho(X,Y) = 0$.

(d) Sim, X e Y são independentes como mostrado no item (a).

Exercício 4 Supondo que (X,Y) tem função densidade de probabilidade conjunta normal bivariada com $\mu_X = 0$, $\mu_Y = -1$, $\sigma_X^2 = 1$, $\sigma_Y^2 = 4$ e $\rho = -1/2$.

(a) Temos diretamente que as distribuições marginais de X e Y são normais, isto é, $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2) = \mathrm{N}(0,1)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) = \mathrm{N}(-1,4)$, em que

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{ \frac{-(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{-x^2}{2} \right\}, -\infty < x < \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left\{ \frac{-(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 4}} \exp\left\{ \frac{-(y-(-1))^2}{2 \times 4} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left\{ \frac{-(y+1)^2}{8} \right\}, -\infty < y < \infty.
\end{aligned}$$

(b) Veja que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 0) &= \mathrm{P}(Z > 0) \\
&= 0,5.
\end{aligned}$$

com $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Também,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y > -1) &= \mathrm{P}\left(\frac{Y-(-1)}{2} > \frac{-1-(-1)}{2}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z > 0) \\
&= 0,5.
\end{aligned}$$

(c) Como (X, Y) tem função densidade de probabilidade conjunta normal bivariada, temos diretamente as expressões das distribuições condicionais de $X|Y = y_0$ e $Y|X = x_0$. Sabemos que $X|Y = 0,5 \sim \mathrm{N}(\mu_x + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(0,5-\mu_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2))$ e $Y|X = 0,2 \sim \mathrm{N}(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(0,2 - \mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2))$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X|Y=0,5) &= \mu_x + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(0,5-\mu_Y) \\
&= 0 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(0,5-(-1)) \\
&= -0,375.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X|Y=0,5) &= \sigma_X^2(1-\rho^2) \\
&= 1(1-(-0.5)^2) \\
&= 0,75.
\end{aligned}$$

Logo, $X|Y = 0,5 \sim \mathrm{N}(-0,375; 0,75)$ em que a função densidade de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned}
f_{X|Y=0,5}(x|y=0,5) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0,75}} \exp\left\{\frac{-(x-(-0,375))^2}{2\times 0,75}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1,5\pi}} \exp\left\{\frac{-(x+0,375)^2}{1,5}\right\}, -\infty < x < \infty.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X=0,2) &= \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(0,2-\mu_X) \\
&= -1 - \frac{1}{2}\frac{2}{1}(0,2-0) \\
&= -1,2.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y|X=0,2) &= \sigma_Y^2(1-\rho^2) \\ &= 4(1-(-0.5)^2) \\ &= 3.\end{aligned}$$

Logo, $Y|X=0,2 \sim \text{N}(-1,2;3)$ em que a função densidade de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned}f_{Y|X=0,2}(y|x=0,2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}}\exp\left\{\frac{-(y-(-1,2))^2}{2\times 3}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\exp\left\{\frac{-(y+1,2)^2}{6}\right\}, -\infty < y < \infty.\end{aligned}$$