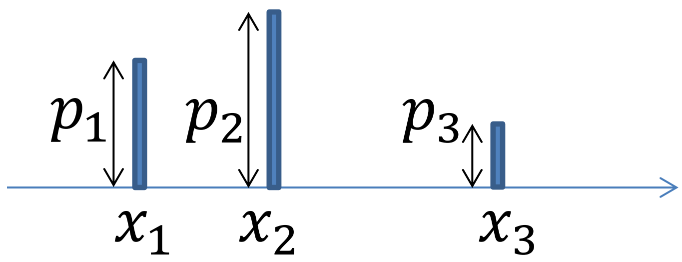
Aula 10. Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

Resumo de caso unidimensional

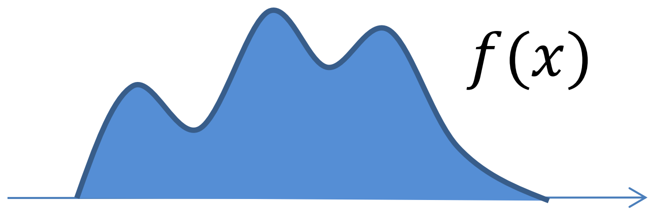
Caso Discreto



$$\sum_i p_i = 1$$

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	x_3
$\boldsymbol{P}$	p_1	p_2	p_3

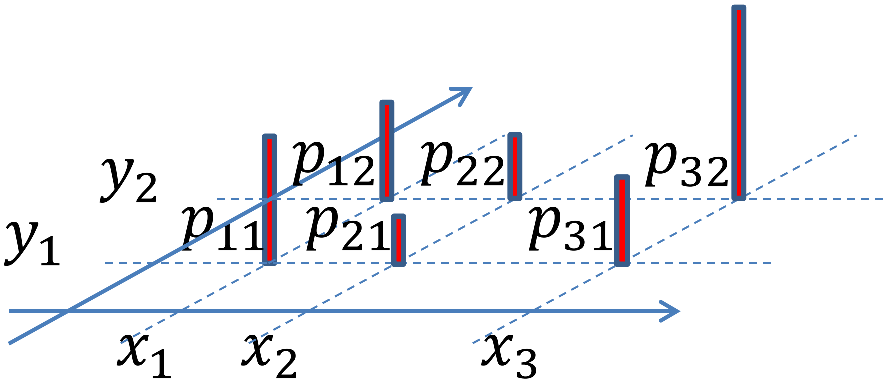
Caso Contínuo



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Caso bidimensional

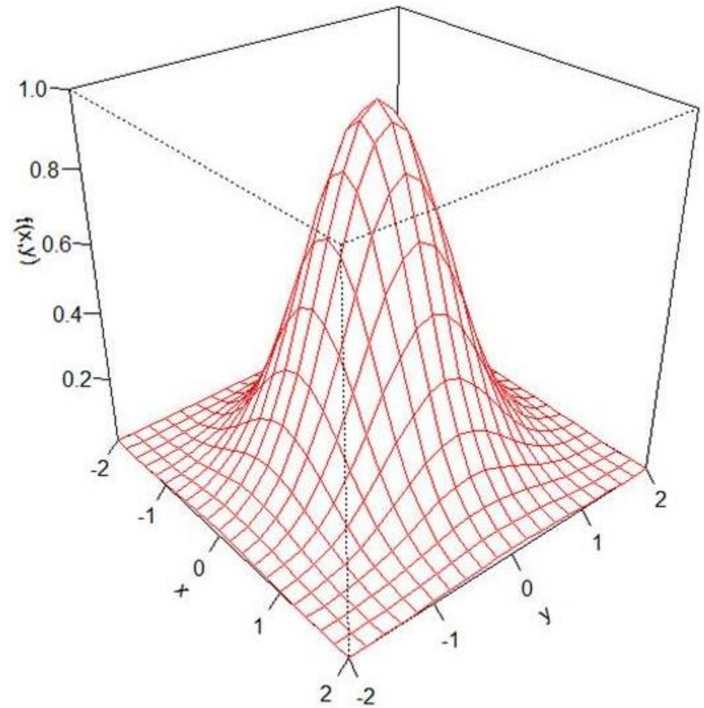
Caso Discreto



$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}
x_3	p_{31}	p_{32}

Caso Contínuo



$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

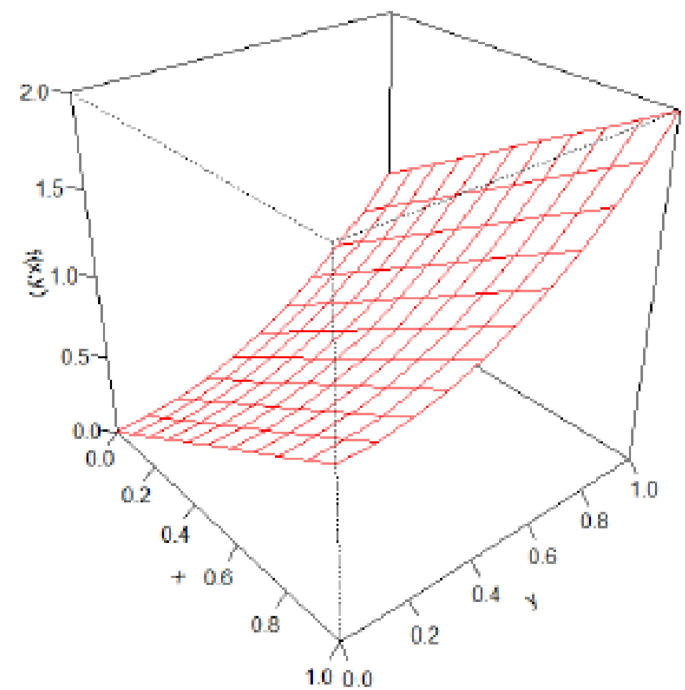
Exemplo 1: Um banco resolveu apostar num serviço "Van Gogh", além do atendimento convencional. Em um dia seja X a proporção de tempo do serviço "Van Gogh", e Y de caixa convencional. Assim, $X \in (0,1)$ e $Y \in (0,1)$. Sabe-se que a distribuição conjunta de X, Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Verificamos de o volume debaixo desse superfície é igual 1:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)dxdy$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y^2)dx\right)dy$$



$$\frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y^2)dx\right)dy = \frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 xdx + \int_0^1 y^2dx\right)dy =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y^2\right)dy = \frac{6}{5}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}dy + \int_0^1 y^2dy\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{y^3}{3}\bigg|_0^1\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{5} = 1$$

Calculo de probabilidade

Caso unidimensional:

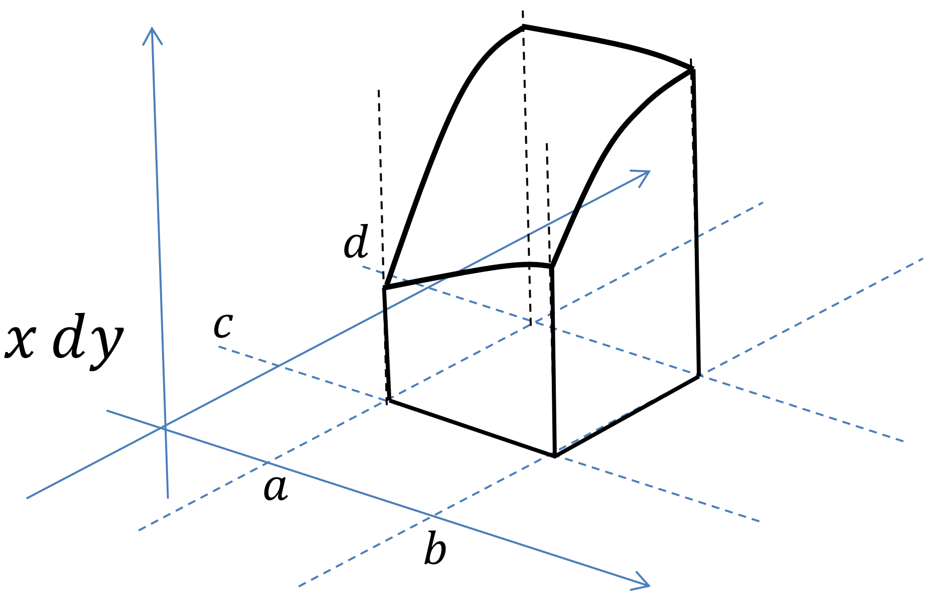
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx \qquad\qquad P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

Caso bidimensional:

$$P(a \le X \le b; c \le Y \le d) = \iint_{a\ c}^{b\ d} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$P(X \in A;\ Y \in B) = \iint_{A\ B} f(x,y)\,dx\,dy$$



Exemplo 1: Um banco resolveu apostar num serviço “Van Gogh”, além do atendimento convencional. Em um dia seja X a proporção de tempo do serviço “Van Gogh”, e Y de caixa convencional. Assim, $X \in (0,1)$ e $Y \in (0,1)$. Sabe-se que a distribuição conjunta de X, Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de nenhum dos serviços estar ocupados em mais de um quarto de tempo.

$$P\left(0 \le X \le \frac{1}{4}; 0 \le Y \le \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\int_0^{1/4} (x + y^2)\, dy\right) dx$$

$$\int_0^{1/4} (x + y^2)\, dy = x \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^3}{3}\bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{x}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{3} = \frac{x}{4} + \frac{1}{192}$$

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}; 0 \leq Y \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}\int_{0}^{1/4}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{192}\right)dx =$$

$$= \frac{6}{5}\int_{0}^{1/4}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{192}\right)dx = \frac{6}{5}\left(\int_{0}^{1/4}\frac{x}{4}dx + \int_{0}^{1/4}\frac{1}{192}dx\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{8}\Bigg|_{0}^{1/4} + \frac{1}{192}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1/16}{8} + \frac{1}{192}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{640}$$

Resposta: $$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}; 0 \leq Y \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{640}$$

Distribuições marginais

Caso discreto

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

Caso contínuo

$$\boxed{p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}} \Rightarrow f(x,\cdot) = \sum_{y} f(x,y)$$

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}$$

$$\boxed{p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}} \Rightarrow f(\cdot,y) = \sum_{x} f(x,y)$$

Exemplo 1: Um banco resolveu apostar num serviço “Van Gogh”, além do atendimento convencional. Em um dia seja X a proporção de tempo do serviço “Van Gogh”, e Y de caixa convencional. Assim, $X \in (0,1)$ e $Y \in (0,1)$. Sabe-se que a distribuição conjunta de X, Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcule a distribuição de proporção do serviço de “Van Gogh”. Calcule a distribuição de proporção do serviço de caixa convencional.

Distribuição marginal de proporção do serviço de “Van Gogh”:

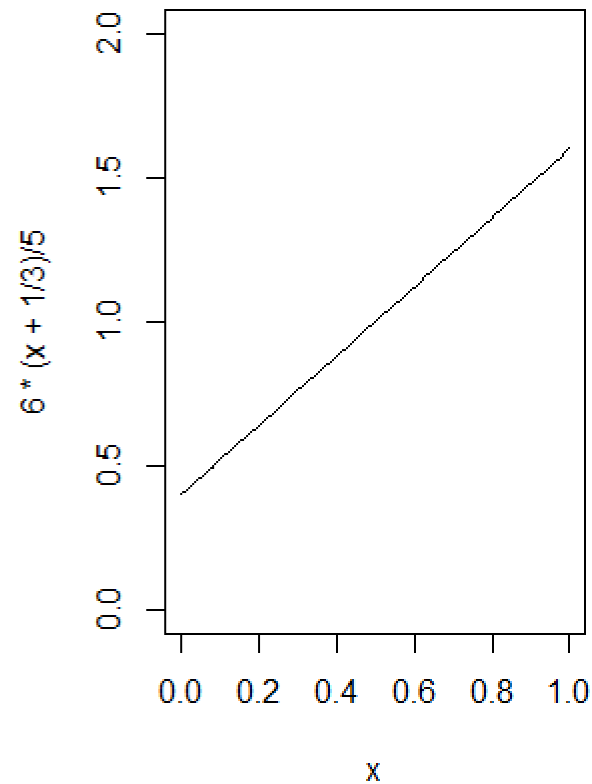
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\, dy, \qquad x \in [0,1]$$

Distribuição marginal de proporção do serviço de “Van Gogh”:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dy, \qquad x \in [0,1]$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)\,dy = \frac{6}{5}\left(x + \int_0^1 y^2\,dy\right) = \frac{6}{5}\left(x + \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right), \qquad x \in [0,1]$$

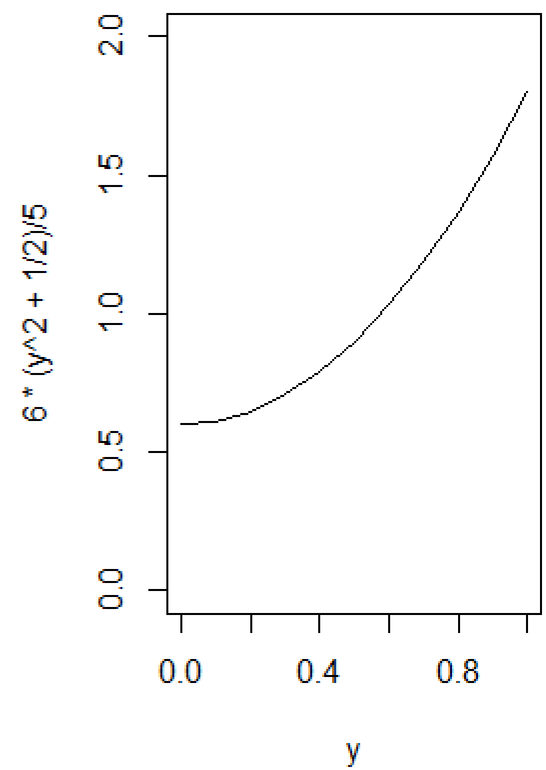


Distribuição marginal de proporção do serviço de caixas convencionais:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,, \qquad y \in [0,1]$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)\,dx = \frac{6}{5}\left(\int_0^1 x\,dx + y^2\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + y^2\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right)$$



Independência de variáveis aleatórias

Caso discreto

duas variáveis aleatórias discretas são independentes se $p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$ para i, j quaisquer.

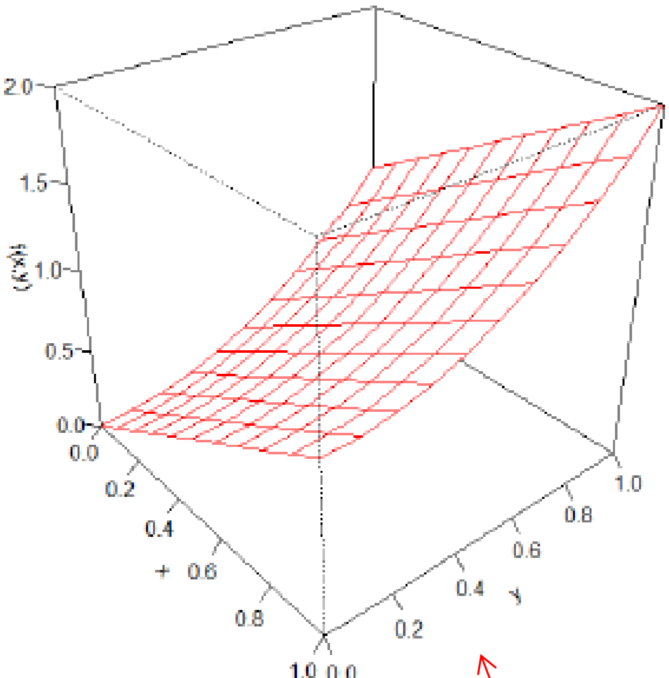
Caso contínuo

duas variáveis aleatórias contínuas são independentes se $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ para x, y quaisquer.

Independência de variáveis aleatórias

Exemplo 1

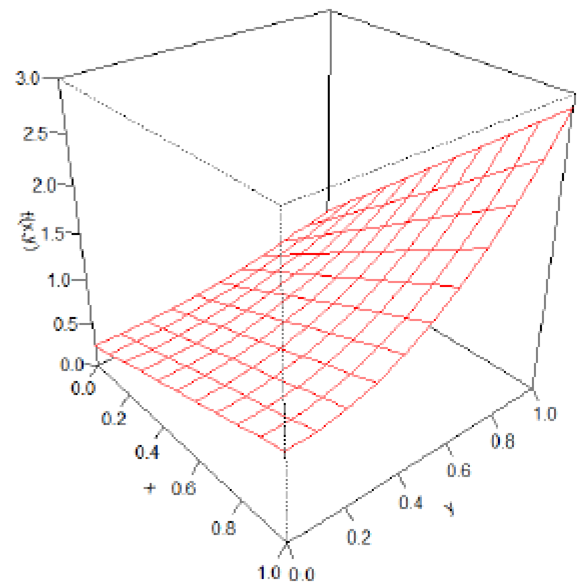
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right), \qquad x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right), \qquad y \in [0,1]$$

$$\boxed{f(x,y)} \neq \boxed{f_X(x) f_Y(y)}$$



<u>Exemplo 2</u>: Uma mulher e um homem decidem se encontrar num lugar. Se cada um deles independentemente um de outro chega no local em um instante uniformemente distribuído entre 12hs e 13hs Qual é a probabilidade de que o primeiro a chegar não vai esperar o outro mais de que 10 min?

Seja X, Y tempo de chegada de mulher e de homem respectivamente. A probabilidade de interesse é $P(|X-Y|<\frac{1}{6})$. $X, Y \sim U(0,1)$.

$$P\left(|X-Y|<\frac{1}{6}\right) = \iint_{|x-y|<1/6} f(x,y)dxdy =$$

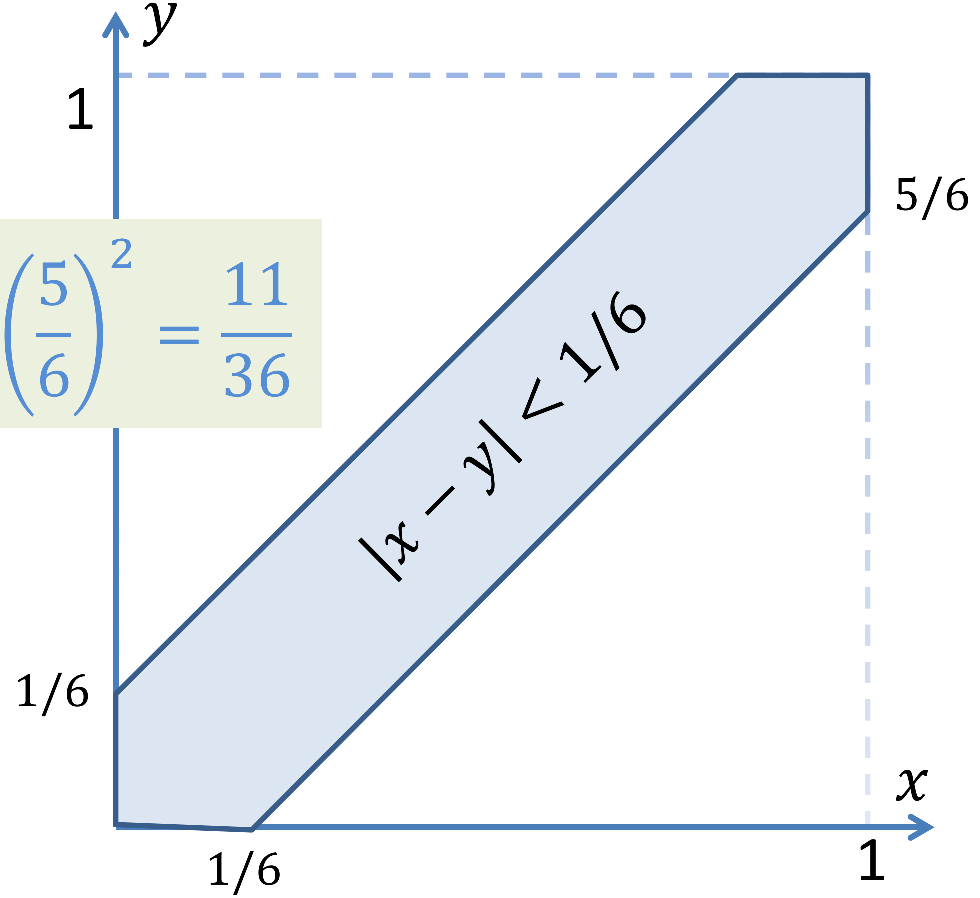
$$= \iint_{|x-y|<1/6} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$= \iint_{|x-y|<1/6} \boldsymbol{I}(x,y\in[0,1])\,dxdy$$

Exemplo 2

$$P\left(|X-Y|<\frac{1}{6}\right)=\iint\limits_{|x-y|<1/6} \boldsymbol{I}(x,y\in[0,1])\,dxdy$$

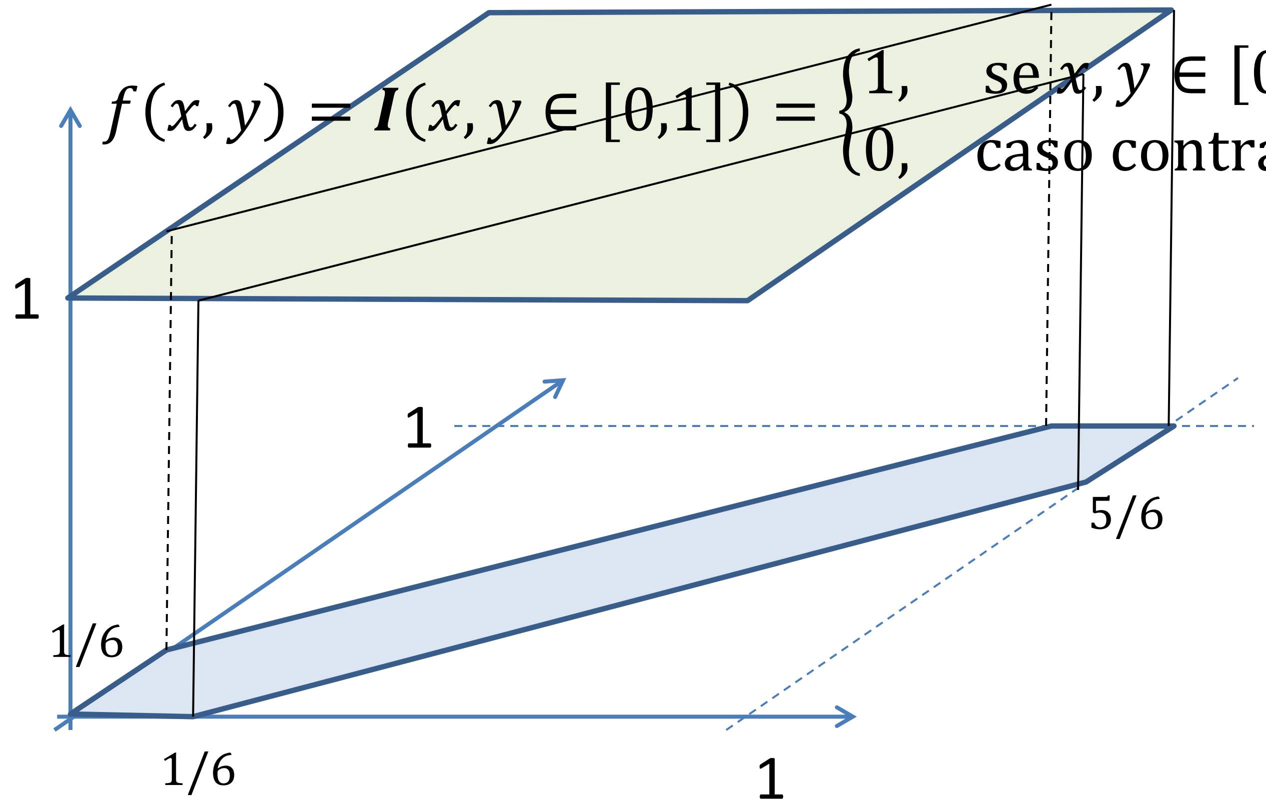
$$Área = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$



Exemplo 2

$$P\left(|X - Y| < \frac{1}{6}\right) = \iint\limits_{|x-y|<1/6} \boldsymbol{I}(x, y \in [0,1])\, dxdy$$

$$f(x,y) = \boldsymbol{I}(x, y \in [0,1]) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$



$$\iint\limits_{|x-y|<1/6} \boldsymbol{I}(x, y \in [0,1])\, dxdy = \acute{A}rea \times \text{Altura} = \frac{11}{36}$$

Esperança de $Z = g(X, Y)$

Caso discreto

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	$g(x_1, y_1)$ p_{11}	$g(x_1, y_2)$ p_{12}	$\cdots$	$g(x_1, y_m)$ p_{1m}
x_2	$g(x_2, y_1)$ p_{21}	$g(x_2, y_2)$ p_{22}	$\cdots$	$g(x_2, y_m)$ p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$g(x_n, y_1)$ p_{n1}	$g(x_n, y_2)$ p_{n2}	$\cdots$	$g(x_n, y_m)$ p_{nm}

$$E(Z) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

Caso contínuo

$$E(Z) = \iint g(x, y) f(x, y)\, dx\, dy$$

Covariância e coeficiente de correlação

Covariância entre duas v.a.s $\mathrm{cov}(X,Y)$ é, pela definição, a esperança

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

Outra forma alternativa de calcular a covariância $\mathrm{cov}(X,Y)$ é

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Caso discreto

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

$$E(X) = \sum_{i} x_i p_{i\cdot}$$

$$E(Y) = \sum_{j} y_j p_{\cdot j}$$

Caso contínuo

$$E(XY) = \iint xyf(x,y)\,dx\,dy$$

$$E(X) = \int xf_X(x)\,dx$$

$$E(Y) = \int yf_Y(y)\,dy$$

Covariância e coeficiente de correlação

Se duas variáveis X e Y são independentes, então $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Para ver isso basta observar que neste caso $E(XY) = E(X)E(Y)$:

$$E(XY) = \iint xyf(x,y)\,dx\,dy = \iint xyf_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int xf_X(x)\ dx \int yf_Y(y)\ dy = E(X)E(Y)$$

então

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - \ E(X)E(Y)\\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0\end{aligned}$$

Covariância e coeficiente de correlação

Coeficiente de correlação entre duas v.a.s $\rho(X,Y)$ é dado pela formula

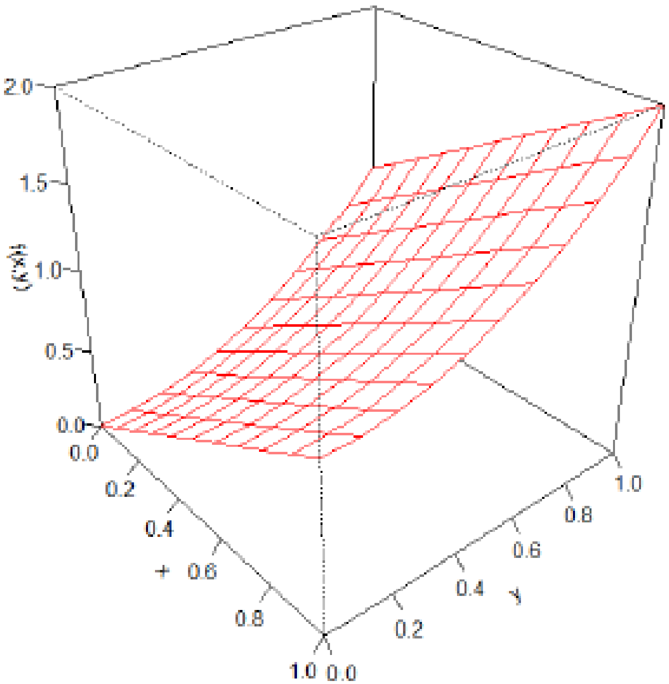
$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
2. $\rho(X,Y) = 1$ se e somente se existe $b > 0$ e a tais que $Y = a + bX$
3. $\rho(X,Y) = -1$ se e somente se existe $b < 0$ e a tais que $Y = a + bX$

Coeficiente $\rho(X,Y)$ as vezes chamam de medida de dependencia linear.

Exemplo 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right), \qquad x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right), \qquad y \in [0,1]$$

Achar covariância entre essas duas variáveis

Para isso temos que achar $E(X)$, $E(Y)$ e $E(XY)$

Achamos $E(X)$:

$$E(X) = \int x f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{6}{5}\int_0^1 x^2\, dx + \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{x}{3} dx =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right) + \frac{6}{15}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\right) = \frac{6}{15} + \frac{6}{30} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Achamos $E(Y)$:

$$E(Y) = \int y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right) dy = \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{y}{2} dy + \frac{6}{5}\int_0^1 y^3\, dy =$$

$$= \frac{6}{10}\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right) + \frac{6}{5}\left(\frac{y^4}{4}\bigg|_0^1\right) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

Achamos $E(XY)$:

$$E(XY) = \int xyf(x,y)\,dx = \int_0^1\int_0^1 xy\frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 xy(x+y^2)\,dx\right)dy = \frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 (x^2y+xy^3)\,dx\right)dy =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1\left(y\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + y^3\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\right)dy = \frac{6}{5}\int_0^1\left(\frac{y}{3}+\frac{y^3}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{6}{15}\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right) + \frac{6}{10}\left(\frac{y^4}{4}\bigg|_0^1\right) = \frac{6}{15}\cdot\frac{1}{2}+\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5}+\frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{20} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = -0.01$$

Achamos coeficiente de correlação $\rho(X,Y)$:

$$E(X^2) = \int x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 x^3\,dx + \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{6}{20} + \frac{6}{30} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{50}$$

$$E(Y^2) = \int y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2 \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right) dy =$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{y^2}{2}\,dy + \frac{6}{5}\int_0^1 y^4\,dy = \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{11}{25} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

Achamos coeficiente de correlação $\rho(X,Y)$:

Coeficiente de correlação entre duas v.a.s $\rho(X,Y)$ é dado pela formula

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{-0.01}{\sqrt{0.14}\sqrt{0.04}} = -0.134$$

Densidade condicional

Pela definição a densidade de X dado $Y = y_0$ é

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

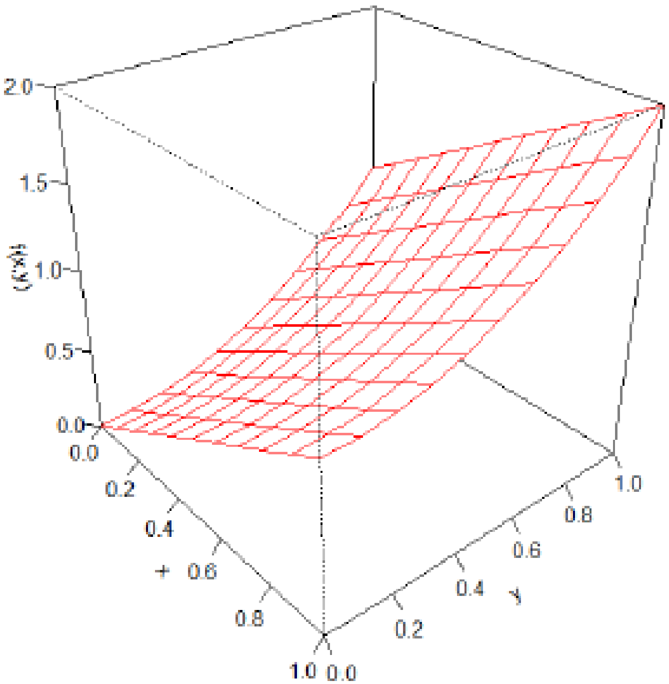
Verificamos se isso é realmente uma função da densidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=y_0}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)} dx = \frac{1}{f_Y(y_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_0)dx =$$

$$= \frac{1}{f_Y(y_0)} f_Y(y_0) = 1.$$

Exemplo 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right), \qquad x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right), \qquad y \in [0,1]$$

Achar densidade de X dado $Y = 0.5$

$$f_{X|Y=0.5}(x) = \frac{f(x,0.5)}{f_Y(0.5)} = \frac{\frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}, x \in [0,1]$$

Exemplo 3. Distribuição conjunta normal

Definição: Variáveis (X, Y) tem a distribuição bi-dimensional normal se a sua densidade conjunta for dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\varrho^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\frac{(y-\mu_y)(x-\mu_x)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$
$$x, y \in (-\infty, +\infty)$$

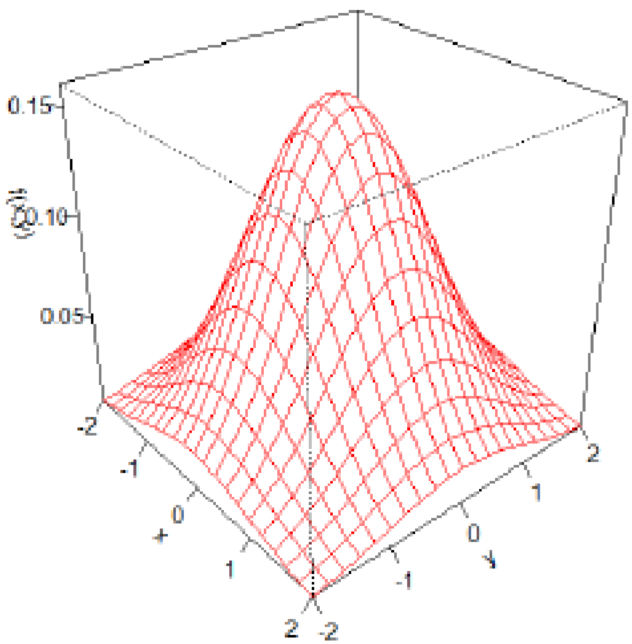
Distribuições marginais: $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

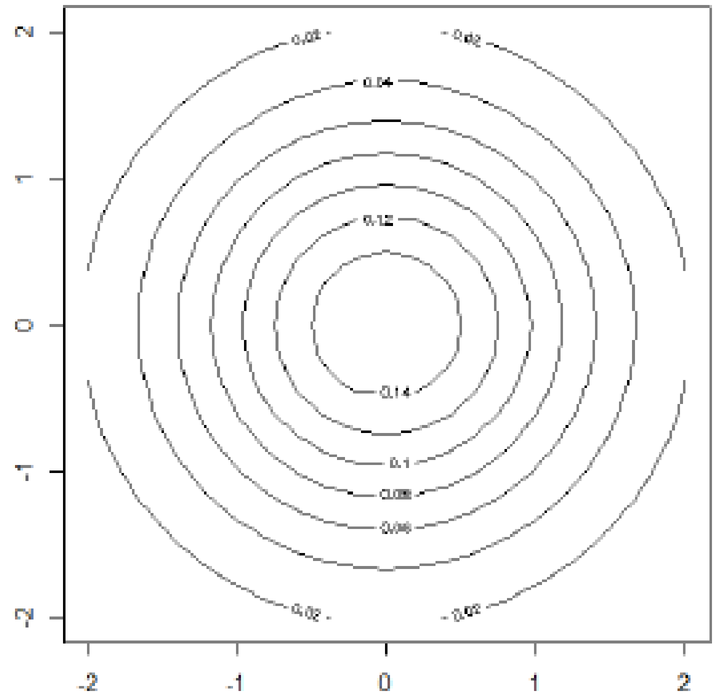
Coeficiente de correlação: $\rho(X, Y) = \rho$

Exemplo 3. Distribuição conjunta normal

$$\mu_x = \mu_y = 0, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1, \rho = 0$$

independência

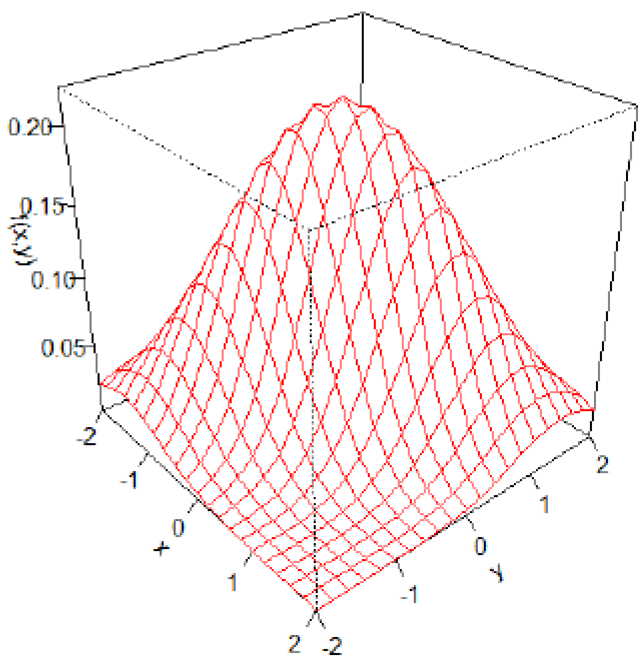


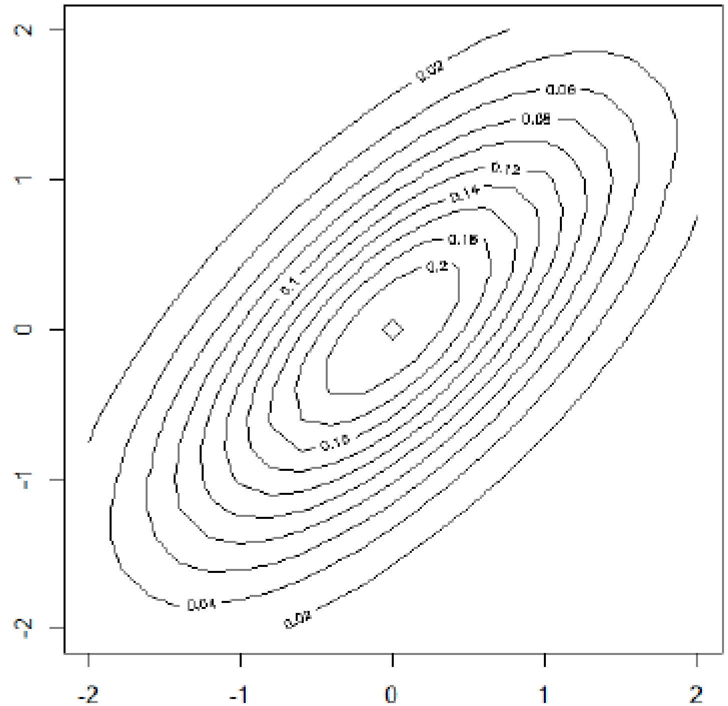


Exemplo 3. Distribuição conjunta normal

$$\mu_x = \mu_y = 0, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1, \rho = 0.7$$

dependência positiva

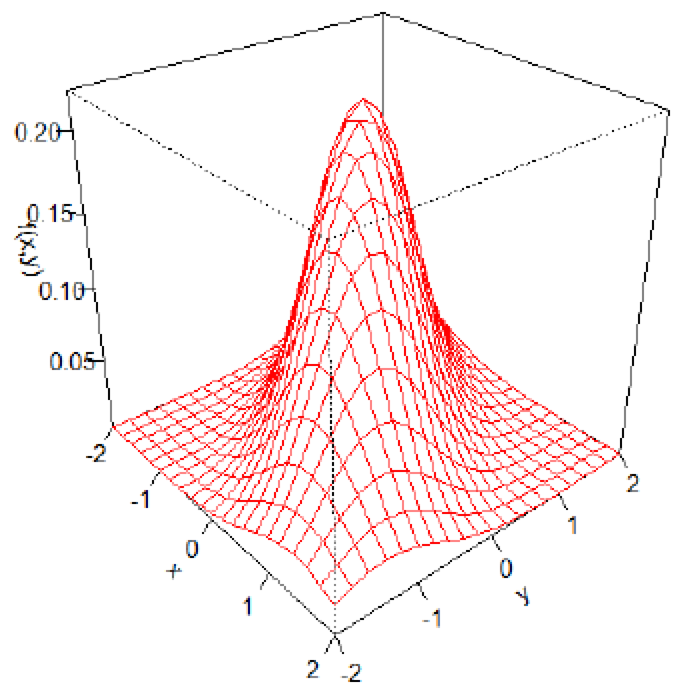


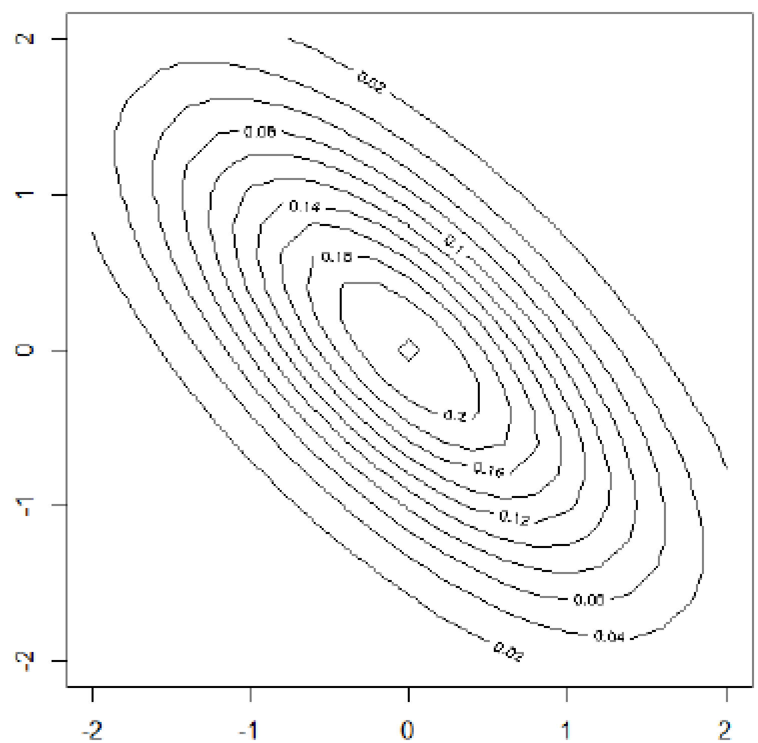


Exemplo 3. Distribuição conjunta normal

$$\mu_x = \mu_y = 0, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1, \rho = -0.7$$

dependência negativa





Exemplo 3. Distribuição conjunta normal

As distribuições conjuntas são normais, com densidades

$$f_{Y|X}(x|y) \sim N\left(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x);\ \sigma_y^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$f_{X|Y}(y|x) \sim N\left(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y);\ \sigma_x^2(1 - \rho^2)\right)$$