Estatística I

Prova de Avaliação Intermediária 1: Gabarito

Matemática e Física ∘ 1º semestre 2006 ∘ Turma 3M

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

Exercício 1. Sejam: P uma probabilidade para um processo aleatório Ψ; e E e F, dois eventos relacionados com esse processo. Usando as propriedades de uma probabilidade, mostre que:

(a) Se $P(E) = 0,9$ e $P(F) = 0,8$, então $P(E \cap F) \geq 0,7$;

(b) De uma maneira geral, $P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$.

Solução. Como

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad \text{e} \quad P(E \cup F) \leq 1 \ ,$$

tem-se:

$$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F) \geq P(E) + P(F) - 1 \ .$$

Isto demonstra (b).

Fazendo agora $P(E) = 0,9$ e $P(F) = 0,8$ na desigualdade acima, teremos:

$$P(E \cap F) \geq 0,9 + 0,8 - 1 = 0,7 \ .$$

Isto demonstra (a).

Exercício 2. Uma urna contem 3 bolas brancas, 3 bolas pretas e 3 bolas vermelhas. Se duas bolas bolas são escolhidas ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de que sejam da mesma cor?

Observação. Descreva o espaço amostral e a valoração que está sendo utilizada.

Solução. Um espaço amostral para esse experimento é:

$$S_\Psi = \{(i,j) : 1 \leq i \neq j \leq 9\} \ ,$$

em que a seguinte correspondência com os inteiros de 1 a 9 é adotada:

branca(1)	branca(2)	branca(3)
preta(4)	preta(5)	preta(6)
vermelha(7)	vermelha(8)	vermelha(9)

Com essa escolha todos os resultados possíveis são igualmente prováveis e podemos utilizar a valoração clássica, isto é,

$$P(E) = \frac{|E|}{|S_\Psi|} \quad \text{para qualquer evento} \quad E \subset S_\Psi \ .$$

Para o evento E:*as duas bolas são da mesma cor*, tem-se:

$$E = \{(i,j) : 1 \leq i \neq j \leq 3\} \cup \{(i,j) : 4 \leq i \neq j \leq 6\} \cup \{(i,j) : 7 \leq i \neq j \leq 9\} \ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{|E|}{|S_\Psi|} = \frac{A_3^2 + A_3^2 + A_3^2}{A_9^2} \\ &= \frac{6 \times 3}{72} \\ &= \frac{1}{4} \ . \end{aligned}$$

Exercício 3. Partindo da casa inferior esquerda de um tabuleiro de xadrêz voce pode mover um peão uma casa acima ou uma casa à direita em cada movimento. Essa movimentação continua até que o peão alcance a casa superior direita (diametralmente oposta). Quantos caminhos distintos o peão pode percorrer para ir do ponto de partida ao ponto de chegada?

Solução. Como cada caminho é composto por 7 movimentos laterais ($\rightarrow$) e 7 movimentos ascendentes ($\uparrow$), ele pode ser representado por um vetor com 14 componentes, sendo 7 iguais a $\rightarrow$ e 7 iguais a $\uparrow$. Permutando-se esses 14 símbolos, teremos todos os caminhos possíveis, isto é:

$$\textit{número de caminhos} \; = \; P_{14}^{7;7} = C_{14}^{7} = \frac{14!}{(7!)(7!)} = 3.432 \; .$$

Exercício 4. Tres moedas, uma com probabilidade 1/3 de dar cara, outra com probabilidade 2/3 e dar cara e outra com duas caras, estão numa gaveta. Se uma dessas moedas é escolhida ao acaso e arremessada duas vêzes:

(a) Qual a probabilidade de que duas caras sejam observadas?

(b) Se você é informado que duas caras foram observadas, use o teorema de Bayes para calcular a probabilidade condicional de que a moeda com duas caras tenha sido selecionada.

Solução. Considere os eventos:

M_1: *a moeda 1 ($p = 1/3$) é selecionada*;

M_2: *a moeda 2 ($p = 2/3$) é selecionada*;

M_3: *a moeda 3 ($p = 1$) é selecionada*;

C_1: *cara no primeiro arremesso*; e

C_2: *cara no segundo arremesso.*

Como M_1, M_2 e M_3 são eventos exclusivos e $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = S_\Psi$, tem-se

$$\begin{aligned}
P(C_1 \cap C_2) &= P((C_1 \cap C_2) \cap (M_1 \cup M_2 \cup M_3)) \\
&= P((C_1 \cap C_2) \cap M_1) + P((C_1 \cap C_2) \cap M_2) + P((C_1 \cap C_2) \cap M_3) \\
&= P(M_1)P((C_1 \cap C_2)|M_1) + P(M_2)P((C_1 \cap C_2)|M_2) + P(M_3)P((C_1 \cap C_2)|M_3) \\
&= \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.1.1 \\
&= \frac{14}{27} \; .
\end{aligned}$$

Finalmente, como $(C_1 \cap C_2) \subset (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$, segue do Teorema de Bayes que

$$\begin{aligned}
P(M_3|C_1 \cap C_2) &= \frac{P(M_3)P((C_1 \cap C_2)|M_3)}{P(M_1)P((C_1 \cap C_2)|M_1) + P(M_2)P((C_1 \cap C_2)|M_2) + P(M_3)P((C_1 \cap C_2)|M_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}.1.1}{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.1.1} \\
&= \frac{9}{14} \; .
\end{aligned}$$