Estatística I

Princípios Básicos de Contagem

Matemática e Física ∘ 1º semestre 2006 ∘ Turma 3M

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

Sob a *valoração clássica*, a determinação da probabilidade de um *evento* E , reduz-se à um problema de contagem: é preciso determinar o número de resultados possíveis, $|S_\Psi|$, do *processo aleatório* Ψ, e o número de elementos, $|E|$, de $E \in S_\Psi$. Para facilitar essa tarefa, vamos introduzir, nestas notas, noções básicas de *contagem*.

De uma maneira geral, se um *processo aleatório* Ψ consiste em realizar K tarefas distintas numa determinada ordem, e a i-ésima tarefa a ser executada tem n_i resultados possíveis, $i = 1, 2, \ldots, K$, esse *processo aleatório* terá

$$\prod_{i=1}^{K} n_i = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_K$$

resultados possíveis.

Exemplo 1. Se uma loteria irá sortear 10 prêmios entre os 345 bilhetes concorrentes, quantos são os seus resultados possíveis?

Neste caso, 10 tarefas serão realizadas em seqüência. Se admitirmos que um bilhete sorteado volta a concorrer nos prêmios subseqüêntes, cada uma dessas tarefas (sortear o ganhador do i-ésimo prêmio, $i = 1, 2, \ldots, 10$) terá 345 resultados possíveis. Portanto, o número de resultados possíveis dessa loteria é

$$\underbrace{345 \times 345 \times \ldots \times 345}_{10 \quad fatores} = 345^{10}.$$

Por outro lado, se admitirmos que um bilhete sorteado não volta a concorrer nos prêmios subseqüêntes, cada uma dessas tarefas (sortear o ganhador do i-ésimo prêmio, $i = 1, 2, \ldots, 10$) terá um número diferente de resultados possíveis. Específicamente:

1. O sorteio do ganhador do primeiro prêmio terá 345 resultados possíveis;
2. O sorteio do ganhador do segundo prêmio terá $345 - 1 = 344$ resultados possíveis;
3. O sorteio do ganhador do terceiro prêmio terá $345 - 2 = 343$ resultados possíveis;

e assim sucessivamente. De uma maneira geral, para $i = 1, 2, \ldots, 10$, o sorteio do ganhador do i-ésimo prêmio terá $345 - i + 1$ resultados possíveis. Portanto, o número de resultados possíveis dessa loteria é

$$\underbrace{345 \times 344 \times \ldots \times 336}_{10 \quad fatores} = \prod_{i=1}^{10}(345 - i + 1).$$

$\triangle$

De uma maneira geral, se um *processo aleatório* Ψ consiste em sortear K objetos de um conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, N\}$, um a um em seqüência e com reposição, dispondo-os em uma fila na mesma ordem em que foram sorteados, esse *processo aleatório* terá

$$\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{K \quad fatores} = N^K$$

resultados possíveis. Esses resultados diferem entre sí tanto pela natureza dos objetos sorteados quanto pela ordem em que os mesmos são sorteados. Na linguagem da análise combinatória eles constituem as possíveis *amostras ordenadas de tamanho* K , *com reposição*, que se pode formar a partir de um conjunto com N objetos, ou ainda os possíveis *arranjos com reposição de* N *objetos tomados* K *a* K. O número de *arranjos com reposição de* N *objetos tomados* K *a* K é representado simbolicamente por AR_N^K . Assim,

$$AR_N^K \; = \; N^K.$$

Para um *processo aleatório* Ψ que consiste em sortear K objetos de um conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, N\}$, um a um em seqüência e sem reposição, dispondo-os em uma fila na mesma ordem em que foram sorteados, o número de resultados possíveis será

$$\underbrace{N \times (N-1) \times \times (N-2) \ldots \times (N-K+1)}_{K \quad fatores} = \prod_{i=1}^{K} (N-i+1).$$

Esses resultados também diferem entre sí tanto pela natureza dos objetos sorteados quanto pela ordem em que os mesmos são sorteados. Na linguagem da análise combinatória eles constituem as possíveis *amostras ordenadas de tamanho* K , *sem reposição*, que se pode formar a partir de um conjunto com N objetos, ou ainda os possíveis *arranjos simples de* N *objetos tomados* K *a* K. Nesse caso, a restrição $K \leq N$ deve ser observada. O número de *arranjos simples de* N *objetos tomados* K *a* K é representado simbolicamente por A_N^K . Assim,

$$A_N^K \; = \; \prod_{i=1}^{K} (N-i+1) \; =^{not} \; (N)_K.$$

Exemplo 2. Suponha que uma urna contém bolas numeradas de 1 a 10 . Se um *processo aleatório* consiste em sortear, uma a uma em seqüência e sem reposição, todas as bolas da urna e colocá-las em fila na mesma ordem em que foram sorteadas, quantos são os seus resultados possíveis?

Pelo exposto acima, esse número é igual a $10!$ pois

$$A_{10}^{10} \; = \; \prod_{i=1}^{10} (10-i+1) \; = \; 10!.$$

$\triangle$

No caso particular do **Exemplo 2**, os *arranjos simples dos* 10 *objetos (as bolas numeradas de* 1 *a* 10 *), tomados* 10 *a* 10 são denominados *permutações simples dos* 10 *objetos.* De uma maneira geral, o número de *permutações simples de* N *objetos* é representado simbolicamente por P_N e

$$P_N \; = \; A_N^N \; = \; N! \; .$$

Exemplo 3. Suponha que uma urna contém duas bolas com a letra A, três com a letra B e quatro com a letra C. Se o *processo aleatório* consiste em sortear, uma a uma em seqüência e sem reposição, todas as bolas da urna e colocá-las em fila, na mesma ordem em que foram sorteadas, quantos são os seus resultados possíveis *distintos*?

O número de resultados possíveis é obviamente igual a $P^N = 9!$. Esses resultados, entretanto não são *distintos* pois a simples troca de posição de letras iguais em um resultado não o modifica. Como em qualquer resultado há duas letras A, três letras B e quatro letras C que podem ser permutadas sem que isso o modifique, o número de resultados *distintos* do *processo aleatório* é

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}.$$

△

No **Exemplo 3**, as *permutações simples*, distintas, *dos* 9 *objetos* (as bolas com letras A, B e C), são denominadas *permutações dos* 9 *objetos com repetições de* 2, 3 *e* 4. De uma maneira geral, o número de *permutações de* N *objetos com repetições de* N_1, N_2 $\ldots$ N_K, em que $N_1 + N_2 + \ldots + N_K \leq N$, é representado simbolicamente por

$$P_N^{N_1, N_2 \ldots N_K}$$

e

$$P_N^{N_1, N_2 \ldots N_K} = \frac{N!}{N_1! \times N_2! \times \ldots \times N_K!}.$$

Exemplo 4. Suponha que uma urna contém bolas numeradas de 1 a 5. Se um *processo aleatório* consiste em sortear, uma a uma em seqüência e sem reposição, 3 bolas dessa urna e colocá-las em uma nova urna, sem preservar a ordem em que foram sorteadas, quantos são os seus resultados possíveis?

Suponha que antes de armazenar as bolas sorteadas na nova urna elas sejam colocadas em fila, na mesma ordem em que foram sorteadas. Se o *processo aleatório* parasse por aí, o número de resultados possíveis seria, obviamente, igual a $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$. Entretanto, ao colocá-las na nova urna, a ordem que as bolas sorteadas ocupavam na fila é destruída. Com isso, qualquer outro resultado consistindo das mesmas bolas, sorteadas em uma outra ordem, resultaria no mesmo conjunto de bolas depois de colocadas na nova urna. Como qualquer subconjunto de 3 bolas admite $3!$ formas possíveis de ser colocadas em fila, o número de resultados possíveis do *processo aleatório* é

$$\frac{A_5^3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

△

De uma maneira geral, se um *processo aleatório* Ψ consiste em sortear K objetos de um conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, N\}$, um a um em seqüência e sem reposição, sem preservar a ordem em que foram sorteadas, esse *processo aleatório* terá

$$\frac{A_N^K}{K!} = \frac{N!}{K! \times (N-K)!}$$

resultados possíveis. Esses resultados que diferem apenas pela natureza dos objetos sorteados. Na linguagem da análise combinatória eles constituem as possíveis *amostras não ordenadas de tamanho* K, *sem reposição*, que se pode formar a partir de um conjunto com N objetos, ou ainda as possíveis *combinações simples de* N *objetos tomados* K *a* K. O número de *combinações simples de* N *objetos tomados* K *a* K é representado simbolicamente por C_N^K e

$$C_N^K = \frac{A_N^K}{K!} = \frac{N!}{K! \times (N-K)!}.$$

Nesse caso também, a restrição $K \leq N$ deve ser observada.

Exemplo 5. Suponha que uma urna contém 3 bolas com as letras A, B e C . Se o *processo aleatório* consiste em sortear, uma a uma em seqüência e com reposição, 5 bolas dessa urna, preservando apenas o número de vêzes que cada bola foi sorteada, quantos são os seus resultados possíveis?

Não é difícil perceber que o número de resultados possíveis nesse caso coincide com o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

Nesta equação,

x_1 representa o número de letras A sorteadas;
x_2 representa o número de letras B sorteadas; e
x_3 representa o número de letras A sorteadas.

A soma é igual a 5 pois 5 bolas são sorteadas. O número dessas soluções, como veremos em classe, é

$$C^5_{3+5-1} = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21.$$

$\triangle$

De uma maneira geral, se um *processo aleatório* Ψ consiste em sortear K objetos de um conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, N\}$, um a um em seqüência e com reposição, preservando apenas o número de vêzes que cada objeto de A é sorteado, esse *processo aleatório* terá

$$\frac{(N + K - 1)!}{K! \times (N - 1)!}$$

resultados possíveis. Esses resultados diferem apenas pela quantidade de vêzes que cada um dos objetos de A é sorteado. Na linguagem da análise combinatória eles constituem as possíveis *amostras não ordenadas de tamanho* K , *com reposição*, que se pode formar a partir de um conjunto com N objetos, ou ainda as possíveis *combinações com repetição de* N *objetos tomados* K *a* K. O número de *combinações com repetição de* N *objetos tomados* K *a* K é representado simbolicamente por CR^K_N e

$$CR^K_N = \frac{(N + K - 1)!}{K! \times (N - 1)!}.$$