Estatística I
Cálculo de Probabilidades

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

De uma maneira informal, uma *probabilidade* é uma *valoração* das chances de um *evento* relacionado com um *processo aleatório*, Ψ , ocorrer em uma realização deste último.

Processos Aleatórios. O têrmo *processo* refere-se a um conjunto de tarefas e condições que, uma vez realizadas, produzem um resultado específico. Diz-se que um processo é *aleatório* se houver a possibilidade intrínseca dos seus resultados, em diferentes realizações, apresentarem uma variabilidade incontrolável.

Exemplos de Processos Aleatórios.

- Ψ_1 - Uma série de 3 ensios de fogo com um extintor;
- Ψ_2 - A seleção casual de uma *amostra* de 10 peças de um lote de tamanho 100 para fins de inspeção de qualidade;
- Ψ_3 - A aplicação de um tratamento químico em um conjunto de 10 *cobaias*;
- Ψ_4 - A valorização diária de um ativo ao longo de uma semana.

$\triangle$

Evento. O têrmo *evento* relacionado com um *processo aleatório* refere-se a uma *proposição* específica acêrca do seu resultado. Realizado o processo, diz-se que um *evento* ocorreu ou não ocorreu conforme o resultado obtido satisfaça ou não satisfaça, respectivamente, a proposição que o define.

Exemplos de Eventos. As proposições:

- π_1: apenas um *sucesso* é obtido na série de ensaios de fogo;
- π_2: no máximo duas peças *defeituosas* são amostradas;
- π_3: o tempo médio de *resposta* ao tratamento é maior que 30 minutos;
- π_4: a variação de valor ao longo da semana é superior a 1%.

definem, respectivamente, *eventos* relacionados com os *processos aleatórios*, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4, exemplificados acima.

$\triangle$

No cálculo de probabilidades, os *eventos* relacionados com um *processo aleatório*, Ψ, são usualmente representados por subconjuntos de um *espaço amostral* para Ψ, previamente escolhido.

Espaço Amostral. Um *espaço amostral* para um *processo aleatório*, Ψ, é simplesmente um conjunto, S_Ψ, cujos elementos representam seus possíveis resultados. Cada resultado possível de Ψ é representado por um único ponto de S_Ψ.

Exemplos de Espaços Amostrais. Representando-se *sucesso* por 0 e $fracasso$ por 1, um *espaço amostral* para Ψ_1 descrito acima é, por exemplo,

$$S_{\Psi_1} \; = \; \{(x_1, x_2, x_3) : \; x_i = 0, 1 \; ; \; i = 1, 2, 3\} \; .$$

Para Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4, podemos definir:

$$S_{\Psi_2} \; = \; \{ \; f \; : \; \; f : \{1, 2, \ldots, 10\} \mapsto \{1, 2, \ldots, 100\} \; \};$$

$$S_{\Psi_3} \; = \; \{ \; (t_1, t_2, \ldots, t_{10}) \; : \; t_i > 0 \; ; \; i = 1, 2, \ldots, 10 \; \}; \quad \text{e}$$

$$S_{\Psi_4} \; = \; \{ \; (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \; : \; v_i = [0, \infty) \; ; \; i = 1, 2, 3, 4, 5 \; \}.$$

Nesses *espaços amostrais*, os eventos descritos por π_1, π_2, π_3 e π_4 são representados, respectivamente pelos seguintes subconjuntos:

$$E_1 \; = \; \{ \; (x_1, x_2, x_3) \in S_{\Psi_1} \; : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \; \};$$

$$E_2 \; = \; \{ \; f \in S_{\Psi_2} \; : \; \; |f^{-1}(\{d_1, d_2, \ldots, d_M\})| \leq 2 \; \};$$

$$E_3 \; = \; \{ \; (t_1, t_2, \ldots, t_{10}) \in S_{\Psi_3} \; : \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_i > 30 \; \}; \quad \text{e}$$

$$E_4 \; = \; \{ \; (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in S_{\Psi_4} \; : \; \prod_{i=1}^{5} v_i > 1,01 \; \}.$$

$\triangle$

Probabilidade. Consideradas em conjunto, a *valoração* das chances dos *eventos* relacionados com um *processo aleatório*, Ψ , ocorrerem em uma realização deste último, é uma *regra de cálculo*, P , precisamente definida, que atribui a cada *evento* E relacionado com Ψ , um *valor* numérico real, $P(E)$, compreendido entre 0 e 1 , à chance de E ocorrer em uma realização de Ψ . Essa *valoração*, entretanto, deve atender às seguintes condições de *coerência*:

- $P(E) = 1$ se $E = S_\Psi$; e
- $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots$, se E for uma união enumerável, finita ou infinita, de eventos exclusivos $E_1, E_2, \ldots$, relacionados com Ψ.

Por simplicidade, se P for uma *valoração* satisfazendo todas as condições acima, diremos que P é uma *probabilidade* para Ψ.

Notas - Formação de Eventos.

Dois *eventos* especiais, estão sempre relacionados com um *processo aleatório* Ψ. São eles: o *evento nulo*, definido por uma *impossibilidade*, π , e representado pelo subconjunto vazio, $\oslash$, do *espaço amostral*; e o *evento certo*, definido por uma *tautologia*, π , e representado pelo próprio espaço amostral, S_Ψ. Além disso, a cada *evento* E relacionado com um *processo aleatório* Ψ está associado o *evento complementar* de E, representado por

$$E^c =^{def} \{s \in S_\Psi : s \notin E\}.$$

Assim, E^c ocorre em uma realização de Ψ se e somente se E não ocorre.

A cada par de *eventos* E_1, E_2 relacionados com um *processo aleatório* Ψ estão associados também os seguintes eventos:

- E_1 *união* E_2

Representado por

$$E_1 \cup E_2 =^{def} \{s \in S_\Psi : s \in E_1 \quad ou \quad s \in E_2\},$$

este *evento* ocorre se e somente se pelo menos um dos E_j, $j = 1, 2$, ocorre.

- E_1 *interseção* E_2

  Representado por

  $$E_1 \cap E_2 =^{def} \{s \in S_\Psi : s \in E_1 \quad e \quad s \in E_2\},$$

  este *evento* ocorre se e somente se E_j, $j = 1, 2$, ocorrem simultaneamente. Em particular, diz-se que os *eventos* E_1 e E_2 são *exclusivos* se $E_1 \cap E_2 = \oslash$.[1]

- E_1 *menos* E_2

  Representado por

  $$\begin{aligned} E_1 - E_2 &= {}^{def}\{s \in S_\Psi : s \in E_1 \quad e \quad s \notin E_2\} \\ &= E_1 \cap E_2^c, \end{aligned}$$

  este *evento* ocorre se e somente se o *evento* E_1, ocorre e, simultaneamente, o *evento* E_2 não ocorre.

- *diferença simétrica entre* E_1 *e* E_2

  Representado por

  $$\begin{aligned} E_1 \Delta E_2 &= {}^{def}\{s \in S_\Psi : s \ \ pertence\ a\ um\ e\ apenas\ um\ E_j,\ j = 1, 2\} \\ &= (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1), \end{aligned}$$

  este *evento* ocorre se e somente se um e apenas um dos *eventos* E_j, $j = 1, 2$, ocorre.

Dado um par de *eventos* E_1, E_2 relacionados com um *processo aleatório* Ψ, diz-se que E_1 *implica* E_2 se $E_1 \subset E_2$.

$\triangle$

Exemplo de Incoerência. Seja Ψ o *processo aleatório* que consiste em sortear, ao acaso, um entre os 1000 bilhetes concorrentes de uma loteria. Uma *probabilidade*, P , não pode atribuir aos *eventos* E_1, E_2 e E_3, correspondentes às proposições:

π_1: *o dono do bilhete sorteado tem idade superior a* 60 *anos*;

π_2: *o dono do bilhete sorteado tem menos de* 40 *anos*; e

π_3: *o dono do bilhete sorteado tem entre* 40 *e* 60 *anos de idade*

respectivamente, os valores:

$$P(E_1) = \frac{1}{3}\ , \quad P(E_2) = \frac{1}{2} \ \text{ e } \ P(E_3) = \frac{1}{3}\ .$$

Note que E_1, E_2 e E_3 são exclusivos e $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S_\Psi$. Portanto, deveríamos ter:

$$P(S_\Psi) \ = \ P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \ = \ P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \ = \ 1\ ,$$

o que não ocorre.

$\triangle$

[1] Diz-se que $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots\}$, é uma família de eventos *exclusivos*, relacionados com Ψ, se $E_i \cap E_j = \oslash$ para quaisquer $1 \le i < j < \infty$

Exemplos de Probabilidades. Garantir que uma *valoração*, P , satisfaz as condições de *coerência* acima não é uma tarefa trivial. Contudo, em alguns casos particulares é possivel construir *valorações coerentes*.

Valoração Clássica. A *valoração clássica* é aplicada, de uma maneira geral, quando o *processo aleatório*, Ψ , tem uma quantidade finita de resultados *equiprováveis*. Nesses casos, a probabilidade de um *evento* $E \subset S_\Psi$ é dada por

$$P(E) \ = \ \frac{|E|}{|S_\Psi|}.$$

Valoração Discreta Geral. A *valoração discreta*, é aplicada quando o *processo aleatório*, Ψ , tem uma quantidade enumerável, finita ou infinita, de resultados possíveis. Nesses casos, a probabilidade de um *evento* $E \subset S_\Psi$ é dada por

$$P(E) \ = \ \sum_{s \in E} p(s) \ ,$$

em que $\{p(s) \ : \ s \in S_\Psi\}$, são números reais tais que:

- $p(s) \in [0,1]$ se $s \in S_\Psi$,
- $\sum_{s \in S_\Psi} p(s) \ = \ 1.$

Esses números são denomidos *probabilidades elementares* e correspondem às *valorações* das chances de cada resultado possível do *processo aleatório*, Ψ , ocorrer em uma realização do mesmo.

Valoração Uniforme. A *valoração uniforme* é aplicada, de uma maneira geral, quando o *processo aleatório* Ψ consiste em *selecionar, ao acaso, um ponto em uma região R de medida (comprimento, volume, ...) finita.* Nesses casos, a probabilidade de um *evento* $E \subset S_\Psi = R$ é dada por

$$P(E) \ = \ \frac{medida(E)}{medida(R)}.$$

Esse tipo de *valoração* é comumente utilizada em proplemas de *probabilidade geométrica*.

Valoração Contínua em $\Re$. A *valoração contínua em* $\Re$, é comumente aplicada quando o *espaço amostral*, S_Ψ , do *processo aleatório* Ψ é um intervalo $I \subset \Re$. Nesses casos, a probabilidade de um *evento* $E \subset I$ é dada por

$$P(E) \ = \ \int_E p(s) ds \ ,$$

em que $p : I \mapsto \Re$, é uma função tal que:

- $p(s) \geq 0$ se $s \in I$,
- $\int_I p(s) ds \ = \ 1.$

Essa função é denomida *função densidade de probabilidade*.

$\triangle$

Notas - Cálculos com Probabilidades.

Se P é uma *probabilidade* para um *processo aleatório*, Ψ , tem-se:

1. $P(\oslash) \ = \ 0$;

2. Para um evento qualquer, E , relacionado com Ψ ,

$$P(E^c) \ = \ 1 \ - \ P(E) \ ;$$

3. Para dois eventos quaisquer, E e F , relacionados com Ψ ,

$$P(E-F) \;=\; P(E) \;-\; P(E\cap F)\ .$$

Em particular, se F *implica* E,

$$P(E-F) \;=\; P(E) \;-\; P(F)$$

e, conseqüentemente, $P(E) \geq P(F)$;

4. Para dois eventos quaisquer, E e F , relacionados com Ψ ,

$$P(E\cup F) \;=\; P(E) \;+\; P(F) \;-\; P(E\cap F)\ .$$

$\triangle$