Estatística I

4. Variáveis Aleatórias

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

De uma maneira informal, *variáveis aleatórias* descrevem características numéricas específicas dos resultados de um *processo aleatório* Ψ .

Exemplos de Variáveis Aleatórias. Considere o *processo aleatório*, Ψ , que consiste em selecionar, ao acaso e sem reposição, cinco bolas de uma urna contendo cinco bolas brancas, numeradas de 1 a 5, cinco bolas vermelhas , numeradas de 6 a 10, e cinco bolas amarelas, numeradas de 11 a 15. Um *espaço amostral* para esse *processo aleatório* é

$$S_\Psi = \{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) : \ n_i = 1, 2, 3, \ldots, 15; \ i = 1, 2, 3, 4, 5; n_i \neq n_j \text{ se } i \neq j \ \}$$

Neste caso:

1. O *número de bolas brancas na amostra*; e

2. O *número de cores distintas na amostra*,

são exemplos de *variáveis aleatórias.* Assim, se o resultado de uma ralização de Ψ for, por exemplo,

$$(11, 2, 8, 3, 14)$$

os valores assumidos por essas *variáveis aleatórias* são, respectivamente,

$$2 \text{ e } 3.$$

Variáveis aleatórias são, portanto, funções definidas em *espaços amostrais* de *processos aleatórios.*

△

Variáveis Aleatórias. De uma maneira mais formal, uma *variável aleatória* é uma função

$$X : S_\Psi \mapsto E \ ,$$

definida no *espaço amostral*, S_Ψ , de um *processo aleatório* Ψ com valores em $E \subset \Re$.

Variáveis Aleatórias Qualitativas. Quando uma função

$$X : S_\Psi \mapsto E \ ,$$

definida no *espaço amostral*, S_Ψ , de um *processo aleatório* Ψ com valores em E descreve uma característica não numérica (um *atributo* ou *um estado*) específica do seu resultado, diz-se que X é uma *variável aleatória qualitativa.*

Exemplos de Variáveis Aleatórias Qualitativas. Com relação ao *processo aleatório* do exemplo anterior:

3. A *cor da primeira bola na amostra*; e

4. As *cores presentes na amostra*,

são exemplos de *variáveis aleatórias qualitativas*. Assim, se o resultado de uma ralização de Ψ for, por exemplo,

$$(11, 2, 8, 3, 14)$$

os valores assumidos por essas *variáveis aleatórias qualitativas* são, respectivamente,

A (*amarelo*) e BVA (*branco, vermelho e amarelo*).

$\triangle$

Uma *variável aleatória* pode ser classificada também de acordo com o *tamanho* do seu conjunto de valores. Se esse conjunto for enumerável, finito ou infinito, diz-se que a *variável aleatória* é *discreta*. Caso contrário, diz-se que ela é *contínua*. Essa classificação se aplica também a uma *variável aleatória qualitativa*. Nos exemplos acima todas as *variáveis aleatórias* são discretas pois seus conjuntos de valores são finitos. Com efeito, se denotarmos as *variáveis aleatórias* definidas em **1**, **2**, **3** e **4** acima por

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \text{ e } \ X_4 \ ,$$

e seus conjuntos de valores por

$$V_1 \ , \ V_2 \ , \ V_3 \ \text{ e } \ V_4 \ ,$$

respectivamente, tem-se:

$$V_1 \ = \ \{0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 4 \ , \ 5\} \ ;$$

$$V_2 \ = \ \{1 \ , \ 2 \ , \ 3\} \ ;$$

$$V_3 \ = \ \{\text{B} \ , \ \text{V} \ , \ \text{A}\} \ ;$$

$$V_4 \ = \ \{\text{B}, \ \text{V} \ , \ \text{A} \ , \ \text{BV} \ , \ \text{BA} \ , \ \text{VA} \ , \ \text{BVA}\} \ .$$

Exemplos de Variáveis Aleatórias Contínuas. Considere *processo aleatório*, Ψ , que consiste em aquecer uma peça a 100^oC. Nesse caso, a

$$\textit{temperatura da peça} \ \ (\text{em } ^oC) \ \ ,$$

medida com um termômetro de precisão, ao final do processo de aquecimento, é uma *variável aleatória contínua*. O conjunto de valores dessa variável é um intervalo

$$V \ = \ [100 - t; 100 + T]$$

para algum valor fixado do par (t, T).

$\triangle$

x_1	$P(X_1 = x_1)$
0	$C_5^0 C_{10}^5 / C_{15}^5 \;=\; \frac{252}{3003}$
1	$C_5^1 C_{10}^4 / C_{15}^5 \;=\; \frac{1050}{3003}$
2	$C_5^2 C_{10}^3 / C_{15}^5 \;=\; \frac{1200}{3003}$
3	$C_5^3 C_{10}^2 / C_{15}^5 \;=\; \frac{450}{3003}$
4	$C_5^4 C_{10}^1 / C_{15}^5 \;=\; \frac{50}{3003}$
5	$C_5^5 C_{10}^0 / C_{15}^5 \;=\; \frac{1}{3003}$

Voltemos agora à *variável aleatória* X_1 definida acima. Em uma realização de Ψ , qual a probabilidade de que *o número de bolas brancas na amostra* seja igual a 0 ? Não é dificil essa probabilidade. De fato, temos

$$P(X_1 = 0) \;=\; \frac{C_5^0 C_{10}^5}{C_{15}^5} \;=\; \frac{252}{3003} \;\approx\; 0,0839 \; .$$

O cálculo acima pode ser reproduzido para os demais valores de X_1 . Fazendo isso obtem-se: A tabela acima é o que denominamos *função de probabilidade* da *variável aleatória discreta* X_1 .

Função de Probabilidade. Se X é uma *variável aleatória discreta* com conjunto de valores V a função

$$x \in V \mapsto f(x) \;=\; P(X = x) \; ,$$

é denominada *função de probabilidade* de X . Se $E \subset V$ o *evento*

$$X \in E$$

tem probabilidade

$$P(X \in E) \;=\; \sum_{x \in E} f(x)$$

Exemplo. Voltando novamente à *variável aleatória* X_1 definida acima. Em uma realização de Ψ , a probabilidade de que *o número de bolas brancas na amostra* no mínimo 4 é igual a

$$P(X \geq 4) \;=\; \frac{50}{3003} + \frac{1}{3003} \;=\; \frac{51}{3003} \; .$$

$\triangle$

Para uma *variável aleatória contínua* X , as probabilidades dos *eventos* da forma $X \in E$, com $E \subset V$, são calculadas a partir de sua *função densidade de probabilidade.* Trata-se de uma função

$$x \in \Re \mapsto f(x) \geq 0 \; ,$$

tal que $f(x) = 0$, para $x \notin V$ e

$$P(X \in E) \;=\; \int_E f(x) dx \; .$$

Exemplo. Para uma *variável aleatória contínua,* X , com valores no intervalo $[0,1]$ e *função densidade de probabilidade*

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; 2x^2 \; , \;\; \text{se} \;\; 0 \leq x \leq 1 \; , \\ &=\; 0 \;\; \text{caso contrário} \; , \end{aligned}$$

tem-se:

$$P(0,1 < X \leq 0,5) \;=\; \int_{0,1}^{0,5} 2x^2 dx \;=\; 0,5^3 - 0,1^3 \;=\; 0,124 \; .$$