Estatística I

3. Processos Aleatórios Compostos

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

Ensaios Independentes.

Um caso particular importante de *processo aleatório composto* é uma série de *ensaios independentes*. Mais precisamnte, a realização de um *processo aleatório* Ψ um certo número de vezes, de forma independente e sob as mesmas condições.

Exemplos de Ensaios Independentes.

1. Uma moeda comum é arremessada tres vezes.

2. De uma urna contendo 2 bolas brancas e 2 bolas pretas, tres bolas são selecionadas ao acaso e com reposição.

3. Um teste de confiabilidade consiste em energizar um relé 10 vezes em sequencia e observar, em cada energização (*ensaio*) se ocorre ou não a mudança de estado esperada.

4. Um teste de diagnóstico é aplicado 3 vezes em um mesmo indivíduo e observa-se, em cada aplicação (*ensaio*) se o resltado é ou não positivo.

Calculando Probabilidades de Eventos Relacionados com Ensaios Independentes.

Suponha que um *processo aleatório* Ψ é realizado independentemente, sob as mesmas condições, digamos, 3 vezes. Qual a probabilidade de que um *evento*, E , relacionado com Ψ , ocorra exatamente uma vez nesses 3 *ensaios independentes*?

Se P é uma *regra de cálculo coerente* para esse *processo aleatório composto*, o que queremos calcular é a probabilidade do *evento*

$$F \;=\; (E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) \cup (E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) \cup (E_1^c \cap E_2^c \cap E_3)\ ,$$

em que E_i , $i = 1, 2, 3$, representa o *evento*

$$E \ \ \textit{ocorre no i-ésimo ensaio.}$$

Portanto,

$$P(F) \;=\; P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3)\ .$$

Como os *eventos* E_1 , E_2 e E_3 são independentes (pois estão relacionados com *ensaios independentes*), temos:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(E_1)P(E_2^c)P(E_3^c) + P(E_1^c)P(E_2)P(E_3^c) + P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3) \\ &= P(E)P(E^c)P(E^c) + P(E^c)P(E)P(E^c) + P(E^c)P(E^c)P(E) \\ &= 3P(E)[1 - P(E)]^2\ . \end{aligned}$$

Portanto, se a probabilidade de E em um *ensaio* é igual a $0,25$, por exemplo, então $P(E) = 0,25$ e

$$P(F) \ = \ 3 \times 0,25 \times (1 - 0,25)^2 \ = \ 0,421875 \ .$$

Esse procedimento pode ser facilmente extendido para um número qualquer de *ensaios* e um número qualquer de de ocorrências do *evento* E .

$\triangle$

Nota. Quando numa série de *ensaios independentes* estamos interessados apenas em saber se um *evento* específico, E , relacionado com Ψ , ocorre ou não, diz-se que esses *ensaios* são *ensaios de Bernoulli.* Nesse contexto, cada *ensaio* tem dois resultados possíveis:

sucesso (o *evento* E ocorre); e

fracasso (o *evento* E não ocorre).

A probabilidade de sucesso, p , neste caso, se refere à probabilidade do *evento* E em cada *ensaio.* No exemplo anterior, calculou-se a probabilidade de

exatamente um **sucesso** *em* 3 *ensaios de Bernoulli independentes.*

Processos Aleatórios Compostos.

De uma maneira geral, o têrmo *processo aleatório composto* se aplica à uma série de *processos aleatórios*, idênticos ou não, realizados em sequência de forma independente ou não. Portanto, uma série de *ensaios independentes* constitui, em particular, um *processo aleatório composto.*

Exemplos de Processos Aleatórios Compostos.

5. Você diapõe de duas moedas. Uma comum e equilibrada (moeda 1) e outra com duas caras (moeda 2). Uma moeda é selecionada ao acaso e arremessada duas vezes.

6. De uma urna contendo cinco bolas brancas, quatro bolas vermelhas e tres bolas amarelas, tres bolas são selecionadas ao acaso e sem reposição.

Calculando Probabilidades de Eventos Relacionados com Processos Aleatórios Compostos.

No *processo aleatório composto* descrito em **5**, qual a probabilidade de observarmos resultados iguais nos dois arremessos?

Se P é uma *regra de cálculo coerente* para esse *processo aleatório*, o que queremos calcular é a probabilidade do *evento*

$$F \ = \ (M_1 \cap C_1 \cap C_2) \cup (M_1 \cap C_1^c \cap C_2^c) \cup (M_2 \cap C_1 \cap C_2) \ ,$$

em que M_i , $i = 1, 2$, representa o *evento*

a moeda i é selecionada,

e C_i , $i = 1, 2$, representa o *evento*

cara no i-ésimo arremesso.

Portanto,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(M_1 \cap C_1 \cap C_2) + P(M_1 \cap C_1^c \cap C_2^c) + P(M_2 \cap C_1 \cap C_2) \ , \\ &= 0,125 + 0,125 + 0,5 = 0,75 \ , \end{aligned}$$

pois:

$$\begin{aligned} P(M_1 \cap C_1 \cap C_2) &= P(M_1)P(C_1|M_1)P(C_2|M_1 \cap C_1) \\ &= 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125 \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_1 \cap C_1^c \cap C_2^c) &= P(M_1)P(C_1^c|M_1)P(C_2^c|M_1 \cap C_1^c) \\ &= 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125 \ ; \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_2 \cap C_1 \cap C_2) &= P(M_2)P(C_1|M_2)P(C_2|M_2 \cap C_1) \\ &= 0,5 \times 1 \times 1 = 0,5 \ . \end{aligned}$$

Nota. O *espaço amostral* para o *processo aleaório composto* descrito em **5** é, obviamente,

$$\begin{aligned} S_\Psi \ = \ \{&(\text{moeda 1,cara,cara}) \quad , \quad (\text{moeda 2,cara,cara}) \ , \ (\text{moeda 2,cara,coroa}) \\ &(\text{moeda 2,coroa,cara}) \quad , \quad (\text{moeda 2,coroa,coroa})\} \ . \end{aligned}$$

Entretanto, a *regra clássica* do cálculo de probabilidades não se aplica nesse caso. O cálculo de probabilidades, aqui, é feito com a *regra discreta*. As probabilidades, $p(s)$, dos resultados possíveis, $s \in S_\Psi$, podem ser obtidas também com o auxílio da regra da multiplicação para probabilidades condicionais. O procedimento é o seguinte:

$$\begin{aligned} p((\text{moeda 1,cara,cara})) &= P(\text{moeda 1})P(\text{cara}|\text{moeda 1})P(\text{cara}|(\text{moeda 1,cara})) \\ &= 0,5 \times 1 \times 1 \ = \ 0,5 \ . \end{aligned}$$

Repetindo esse procedimento obtemos:

s	$p(s)$
(moeda 1,cara,cara)	$0,5 \times 1 \times 1 \; = \; 0,5$
(moeda 2,cara,cara)	$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \; = \; 0,125$
(moeda 2,cara,coroa)	$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \; = \; 0,125$
(moeda 2,coroa,cara)	$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \; = \; 0,125$
(moeda 2,coroa,coroa)	$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \; = \; 0,125$

Assim, o *evento* F, *resultados diferentes nos dois arremessos*, tem probabilidade

$$P(F) \; = \; 0,125 + 0,125 \; = \; 0,25 \; .$$

$\triangle$

No *processo aleatório*, Ψ, descrito em **6**, qual a probabilidade de obtermos bolas das tres cores?

Denotado esse *evento* por G, e aplicando a mesma idéia do exemplo **5**, teremos:

$$\begin{aligned} P(G) \; = \; & p((\text{branca,vermelha,amarela})) \; + \; p((\text{vermelha,branca,amarela})) + \\ & p((\text{vermelha,amarela,branca})) \; + \; p((\text{branca,amarela,vermelha})) + \\ & p((\text{amarela,branca,vermelha})) \; + \; p((\text{amarela,vermelha,branca})) \; . \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} P(F) \; = \; & \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} \; + \; \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{3}{10} + \\ & \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{5}{10} \; + \; \frac{5}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{4}{10} + \\ & \frac{3}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \; + \; \frac{3}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{5}{10} \; = \frac{360}{1320} \approx 0,27 \; . \end{aligned}$$

$\triangle$