# Estatística I

## 2. Probabilidade Condicional e Independência

**Wagner de Souza Borges**
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

Sejam $E$ e $F$ são dois *eventos* relacionados com um *processo aleatório* $\Psi$ e $P$ uma *regra de cálculo coerente*. Se $P(F) > 0$ , a *probabilidade condicional de* $E$ *dado* $F$ , representada por $P(E|F)$ é definida por

$$P(E|F) \ = \ \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Em particular, as seguintes propriedades são válidas:

**1.** $P(E|F) = 1$ se $E = S_\Psi$;

**2.** $P(E|F) = P(E_1|F) + P(E_2|F) + \ldots,$ se $E$ for uma união enumerável, finita ou infinita, de eventos exclusivos $E_1, E_2, \ldots$ , relacionados com $\Psi$.

**3.** $P(\oslash|F) \ = \ 0$ ;

**4.** Para um evento qualquer, $E$ , relacionados com $\Psi$ ,

$$P(E^c|F) \ = \ 1 \ - \ P(E|F) \ ;$$

**5.** Para dois eventos quaisquer, $D$ e $E$ , relacionados com $\Psi$ ,

$$P(E - D|F) \ = \ P(E|F) \ - \ P(E \cap D|F) \ .$$

Em particular, se $D$ *implica* $E$,

$$P(E - D|F) \ = \ P(E|F) \ - \ P(D|F)$$

e, conseqüentemente, $P(E|F) \geq P(D|F)$ ;

**6.** Para dois eventos quaisquer, $D$ e $E$ , relacionados com $\Psi$ ,

$$P(D \cup E|F) \ = \ P(D|F) \ + \ P(E|F)) \ - \ P(D \cap E|F) \ .$$

**Regra da Multiplicação.** Sejam $E_1$ , $E_2$ , ... , $E_n$ , *eventos* relacionados com um *processo aleatório* $\Psi$ e $P$ uma *regra de cálculo coerente*. Se

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1}) \ > \ 0 \ ,$$

então

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \ = \ P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \ldots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1}) \ .$$

$\triangle$

**Teorema de Bayes.** Sejam $F$ , $E_1$ , $E_2$ , ... , $E_n$ , *eventos* relacionados com um *processo aleatório* $\Psi$ e $P$ uma *regra de cálculo coerente*. Se:

$E_1$ , $E_2$ , ... , $E_n$ , são *exclusivos*;

$$P(E_i) > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad ;$$

$$F \ \subset \ E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \quad ; \quad \text{e} \ \ P(F) > 0 \quad ,$$

então

$$P(E_j|F) \ = \ \frac{P(E_j)P(F|E_j)}{\prod_{i=1}^{n} P(E_i)P(F|E_i)} \ .$$

$\triangle$

Sejam $E$ e $F$ são dois *eventos* relacionados com um *processo aleatório* $\Psi$ e $P$ uma *regra de cálculo coerente*. Se $P(F) > 0$ , diz-se que $E$ *independe* de $F$ se

$$P(E|F) \ = \ P(E) \ .$$

Diz-se que os dois *eventos* são *independentes* se $E$ *independe* de $F$ e $F$ também *independe* de $E$. Portanto, os dois *eventos* são *independentes* se e somente se

$$P(E \cap F) \ = \ P(E) \times P(F) \ .$$

Se $\mathcal{F}$ é uma familia de *eventos* relacionados com um *processo aleatório* $\Psi$ e $P$ uma *regra de cálculo coerente*, diz-se que $\mathcal{F}$ é uma familia de *eventos independentes* se para quaisquer $n \geq 2$ e

$$E_1 \ , \ E_2 \ , \ \ldots \ , \ E_n \ \in \ \mathcal{F} \ ,$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \ = \ P(E_1)P(E_2) \ldots P(E_n)$$

*Condicionalidade* e *independência* são armas poderosas no cálculo de probabilidades.