Estatística I

4.1. Algumas Distribuições Discretas

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

Distribuição de Bernoulli.

Exemplo. Se um dado comum é arremessado, a probabilidade de que o *evento* E ,

o número obtido é maior ou igual a 5,

é igual a $1/3$. Temos, portanto, um *ensaio de Bernoulli* em que a *probabilidade de sucesso* é $1/3$. Nesse caso,

número de sucessos observado,

X , é uma *variável aleatória* com *função de probabilidade*

x	$f(x)$
0	2/3
1	1/3

$\triangle$

De uma maneira geral, em um *ensaio de Bernoulli*, com *probabilidade de sucesso* p , $0 \leq p \leq 1$, o

número de sucessos observado,

X , é uma *variável aleatória* com *função de probabilidade*

x	$f(x)$
0	$1-p$
1	p

Essa *função de probabilidade*, expressa em forma tabular, pode ser expressa também em forma analítica. Precisamente,

$$f(x) \ = \ p^x(1-p)^{n-x} \ \ , \ x = 0, \ 1 \ .$$

Neste caso diz-se que X tem *distribuição de Bernoulli com parâmetro* p e escrevemos

$$X \sim Ber(p) \ .$$

Distribuição Binomial.

Exemplo. Suponha agora que o *ensaio de Bernouilli* do **Exemplo** anterior seja repetido, independentemente e sob as mesmas condições, 2 vezes. Determine a *função de probabilidade* da *variável aleatória* X , *número de sucessos nos 2 ensaios.*

Se X_1 é o número de sucessos no 1^o *ensaio* e X_2 é o número de sucessos no 2^o *ensaio*, não é dificil ver que:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}) \\ &= P(X_1=0)P(X_2=0) \\ &= (2/3)^2 \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(\{\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\}\cup\{\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\}\}) \\ &= P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})+P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\}) \\ &= P(X_1=1)P(X_2=0)+P(X_1=0)P(X_2=1) \\ &= (1/3)(2/3)+(2/3)(1/3) \ = \ 2(1/3)(2/3); \ \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}) \\ &= P(X_1=1)P(X_2=1) \\ &= (1/3)^2 \ . \end{aligned}$$

Portanto, X é uma *variável aleatória* com *função de probabilidade*

x	$f(x)$
0	$(2/3)^2$
1	$2(1/3)(2/3)$
2	$(1/3)^2$

$\triangle$

De uma maneira geral, em uma série de n *ensaios de Bernoulli independentes*, o

número de sucessos observado,

X , é uma *variável aleatória* com a seguinte *função de probabilidade*

$$P(X=x) \ = \ C_n^x p^x(1-p)^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,\ldots,n \ .$$

Neste caso diz-se que X tem *distribuição Binomial com parâmetros* n e p , e escrevemos

$$X \sim Bin(n,p) \ .$$

Distribuição Geométrica.

Exemplo. Suponha agora que o *ensaio de Bernouilli* do **Exemplo** anterior seja repetido, independentemente e sob as mesmas condições, até que ocorra o primeiro sucesso. Determine a *função de probabilidade* da *variável aleatória* X ,

número de ensaios realizados.

Se X_i , $i = 1, 2, \ldots$, é o número de sucessos no i-ésimo *ensaio*, não é dificil ver que:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X_1 = 1) \\ &= 2/3 \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) \\ &= (2/3)(1/3) \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 = 1\}) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) \\ &= (2/3)^2(1/3) \ ; \end{aligned}$$

e assim por diante. Portanto, X é uma *variável aleatória* com *função de probabilidade*

$$P(X = x) \ = (1/3)^{x-1}(2/3) \quad , \quad x = 1, 2, \ldots \ .$$

△

De uma maneira geral, se uma série de *ensaios de Bernoulli independentes*, é realizada até que ocorra o primeiro *sucesso*, o

número de ensaios realizados,

X , é uma *variável aleatória* com a seguinte *função de probabilidade*

$$P(X = x) \ = \ (1 - p)^{x-1}p \quad , \quad x = 1, 2, \ldots \ .$$

Neste caso diz-se que X tem *distribuição Geométrica com parâmetro* p , e escrevemos

$$X \sim Geo(p) \ .$$

Distribuição Hipergeométrica.

Exemplo. Suponha que de um lote contendo 3 peças defeituosas e 7 peças boas, 2 peças são retiradas ao acaso e sem reposição. Determine a *função de probabilidade* da *variável aleatória* X ,

número de peças defeituosas entre as 2 selecionadas.

Não é dificil ver que:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{C_3^0 C_7^2}{C_1 0^2} \\ &= \frac{21}{45} \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{C_3^1 C_7^1}{C_1 0^2} \\ &= \frac{21}{45} \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{C_3^2 C_7^0}{C_1 0^2} \\ &= \frac{3}{45} \ . \end{aligned}$$

Portanto, X é uma *variável aleatória* com *função de probabilidade*

x	$f(x)$
0	$\frac{21}{45}$
1	$\frac{21}{45}$
2	$\frac{3}{45}$

$\triangle$

De uma maneira geral, se de uma urna contendo N bolas, das quais M são pretas, $0 < M \leq N$, n bolas são retiradas ao acaso e sem reposição, $0 < n \leq N$, o

número de bolas pretas entre a n retiradas,

X , é uma *variável aleatória* com a seguinte *função de probabilidade*

$$P(X=x) \ = \ \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Neste caso diz-se que X tem *distribuição Hipergeométrica com parâmetro* N , M e n , e escrevemos

$$X \sim Hip(N, M, n) \ .$$