Cálculo Numérico

Prova de Avaliação Intermediária 1: Gabarito

Química ∘ 1º semestre 2006 ∘ Turma 3N

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

22 de março de 2006

Exercício 1. Verifique se $A = B^{-1}$ sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Solução. Observando que $A.B = B.A = I$, tem-se, de fato, que se $A = B^{-1}$.

Exercício 2. Se

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

determine cada uma das matrizes abaixo e obtenha o seu determinante sabendo que $det(M) = -1$:

a. $M_1 = M(M[\cdot,2] \leftarrow (-\frac{1}{\sqrt{\pi}})M[\cdot,2])$;

b. $M_2 = M(M[1,\cdot] \leftrightarrow M[2,\cdot])$; e

c. $M_3 = M(M[\cdot,3] \leftarrow 2.M[\cdot,1] - 3.M[\cdot,2] + M[\cdot,3])$.

Solução.
a.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} & 3 \\ 2 & -\frac{3}{\sqrt{\pi}} & 4 \\ 3 & -\frac{4}{\sqrt{\pi}} & 6 \end{bmatrix} .$$

Neste caso, $det(M_1) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} det(M) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
b.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} .$$

Neste caso, $det(M_2) = -det(M) = 1$.
c. Observando que

$$2.M[\cdot,1] - 3.M[\cdot,2] + M[\cdot,3]) = \begin{bmatrix} 2\times1-3\times2+3 \\ 2\times2-3\times3+4 \\ 2\times3-3\times4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

teremos

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} .$$

Neste caso, $det(M_3) = det(M) = -1$.

Exercício 3. Use apenas a regra de Laplace para calcular o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Solução. Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da primeira coluna, teremos:

$$\begin{aligned} det(M) &= (-1)^{1+1}.1.det(M_{11}) + (-1)^{2+1}.1.det(M_{21}) \\ &= det(M_{11}) - det(M_{21}) \ , \end{aligned}$$

em que:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{e} \ M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Como

$$det(M_{11}) = (1 + (-1) + (-1)) - (1 + 1 + 1) = -4 \ \text{e} \ det(M_{21}) = (1 + 1 + 1) - ((-1) + 1 + (-1)) = 4 \ ,$$

tem-se

$$det(M) = det(M_{11}) - det(M_{21}) = -4 - 4 = -8 \ .$$

Exercício 4. Sem resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{rcrcccccrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & - & \sqrt{2} & = & 0 \\ (2\theta - 1)x_2 & + & x_3 & & & & & - & \sqrt{3} & = & 0 \\ x_3 & + & (1-\theta)x_4 & & & & & - & \sqrt{7} & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & \sqrt{9} & = & 0 \end{array} ,$$

verifique para que valores de θ ele tem solução única.

Solução. Note que o sistema acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (2\theta - 1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-\theta) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{9} \end{bmatrix} .$$

Esse sistema terá uma única solução se a matriz de coeficientes, A , tiver determinante não-nulo, isto é, $det(A) \neq 0$.

Para calcular o determinante de A vamos primeiro transformar essa matriz em uma matriz triangular superior, sem alterar o valor de seu determinante. Isso pode ser feito através da seguintes operações:

$$A_1 = A(A[4, \cdot] \leftarrow A[4, \cdot] - A[1, \cdot]) \ \text{e} \ A_2 = A_1(A_1[4, \cdot] \leftarrow A_1[4, \cdot] - A_1[3, \cdot]) \ .$$

Assim,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (2\theta - 1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{bmatrix} ,$$

e $det(A) = det(A_2) = (2\theta - 1)\theta$. Como,

$$det(A) = 0 \ \Leftrightarrow \ (2\theta - 1)\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \ \text{ ou } \ \theta = \frac{1}{2} \ ,$$

o sistema terá solução única se e somente se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \frac{1}{2}$.