Cálculo Numérico
Matrizes Reais
conceitos básicos

Wagner de Souza Borges
FCBEE, Universidade Presbiteriana Mackenzie
wborges@mackenzie.com.br

Resumo

O conceito de *matriz* tem origem no estudo de sistemas lineares de equações e remonta aos 300 AC com os Babilônios. Entre 200 AC e 100 AC, os chineses chegaram ainda mais perto das *matrizes* e dos *determinantes* que os Babilônios. Escrito durante a *Dinastia Han*, os *Nove Capítulos da Arte Matemática* apresenta os primeiros exemplos de *métodos matriciais.* Nesta aula introduz-se o conceito de *matriz real* e descrevem-se as principais operaçõoes com esses objetos.

1. Matrizes Reais.

Definição.

Uma *matriz real* M é um arranjo retangular de *números reais* da forma

$$M = \left[\begin{array}{rrrrr} -5 & 4 & -\sqrt{2} & 9 & 1 \\ 6,2 & \pi & 5,1 & \sqrt{3} & -0,1 \\ 1 & \sqrt{7} & 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\triangle$

Linhas e Colunas de uma Matriz Real M. Uma *matriz real* M é composta de *linhas* e *colunas.* Em particular, a *linha* 2 da *matriz real* M acima, por exemplo, é a *matriz linha*

$$M[2,\cdot] = \left[\begin{array}{ccccc} 6,2 & \pi & 5,1 & \sqrt{3} & -0,1 \end{array} \right] .$$

Analogamente, a *coluna* 3 da *matriz real* M acima, por exemplo, é a *matriz coluna*

$$M[\cdot,3] = \left[\begin{array}{r} -\sqrt{2} \\ 5,1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right] .$$

Nota. De uma maneira geral, se uma *matriz real* M tem n *linhas* e k *colunas*, a *i-ésima linha* de M é representada por

$$M[i,\cdot] \ , \ i = 1,2,\ldots,n,$$

e a *j-ésima coluna* de M é representada por

$$M[\cdot,j] \ , \ j = 1,2,\ldots,k.$$

$\triangle$

Dimensão de uma Matriz Real M.

No exemplo acima a *matriz real* M tem 4 *linhas* e 5 *colunas*. Por esse motivo, diz-se que M tem *dimensão* 4×5 (*quatro por cinco*).

Nota. De uma maneira geral, uma *matriz real* M com n *linhas* e k *colunas* tem *dimensão* $n \times k$.

$\triangle$

Elementos ou Entradas de uma Matriz Real M.

No exemplo acima, o *número real* que se encontra no cruzamento da *linha* 2 com a *coluna* 3, é denominado *elemento* ou *entrada* $[2,3]$ da *matriz real* M e é denotado por $M[2,3]$. Assim,

$$M[2,3] = 5,1 \ .$$

É comum nos referirmos também à $M[2,3]$ como o *elemento* ou a *entrada* de *posição* $(2,3)$.

Nota. De uma maneira geral, para uma *matriz real* M com n *linhas* e k *colunas* o *elemento* ou a *entrada* de *posição* (i,j) , $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq k$, é representado por $M[i,j]$. Portanto, a *i-ésima linha* de M é a *matriz linha*

$$M[i,\cdot] = \left[\begin{array}{cccc} M[i,1] & M[i,2] & \ldots & M[i,k] \end{array} \right] \ , \ 1 \leq i \leq n \ .$$

Da mesma forma, a *j-ésima coluna* de M é a *matriz coluna*

$$M[\cdot,j] = \left[\begin{array}{r} M[1,j] \\ M[2,j] \\ \vdots \\ M[n,j] \end{array} \right] \ , \ 1 \leq j \leq k \ .$$

$\triangle$

Matriz Quadrada.

Se uma *matriz real* M tem o mesmo número, n, de *linhas* e de *colunas* diz-se que M é uma *matriz quadrada de dimensão* n. Por exemplo, a matriz M abaixo,

$$M = \left[\begin{array}{rrrr} -\sqrt{2} & -5 & 4 & 9 \\ \pi & 5,1 & \sqrt{3} & -0,1 \\ 1 & 2 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

é uma *matriz quadrada de dimensão* 4.

$\triangle$

Matriz Simétrica.

Se M é uma *matriz real quadrada de dimensão* n tal que

$$M[i,j] = M[j,i] \ \text{ para quaisquer } \ 1 \leq i \neq j \leq n \ ,$$

diz-se que M é *simétrica*. Por exemplo, a matriz M abaixo,

$$M = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & 1 & 1 \\ \pi & \sqrt{3} & 2 & -0,1 \\ 1 & 2 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma *matriz simétrica de dimensão* 4.

$\triangle$

Matriz Anti-simétrica.

Se M é uma *matriz real quadrada de dimensão* n tal que

$$M[i,j] = -M[j,i] \text{ para quaisquer } 1 \leq i \neq j \leq n \ ,$$

diz-se que M é *anti-simétrica.* Por exemplo, a matriz M abaixo,

$$M = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\pi & -1 & 1 \\ \pi & \sqrt{3} & 2 & -0,1 \\ 1 & -2 & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma *matriz anti-simétrica de dimensão* 4.

$\triangle$

Matrizes Diagonais.

Se M é uma *matriz real quadrada de dimensão* n tal que

$$M[i,j] = 0 \text{ para quaisquer } 1 \leq i \neq j \leq n \ ,$$

diz-se que M é *diagonal.* Neste caso, podemos também escrever:

$$M = diag(M[1,1], M[2,2], \ldots, M[n,n])$$

Por exemplo, a matriz M abaixo

$$M = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma *matriz diagonal de dimensão* 4. Neste caso, podemos também escrever:

$$M = diag(-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 1).$$

Matriz Escalar.

Se M é uma *matriz diagonal de dimensão* n tal que

$$M[1,1] = M[2,2] = \ldots = M[n,n],$$

diz-se que M é *escalar.* Por exemplo, a matriz M abaixo,

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = diag(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

é uma *matriz escalar de dimensão* 4.

Matriz Identidade.

Se M é uma *matriz diagonal de dimensão* n tal que

$$M[1,1] = M[2,2] = \ldots = M[n,n] = 1,$$

diz-se que M é *identidade.* Por exemplo, a matriz M abaixo,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = diag(1,1,1,1)$$

é uma *matriz identidade de dimensão* 4.

$\triangle$

2. Operações com Matrizes.

Soma de Matrizes.

Sejam M e N *matrizes reais de dimensão* $n \times k$. A *soma* $M + N$ é a *matriz real de dimensão* $n \times k$ definida por

$$(M+N)[i,j] = M[i,j] + N[i,j] \text{ para quaisquer } 1 \leq i,j \leq n\ .$$

Por exemplo, se

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3,2 & -1 & 1 \\ 1 & 2,2 & 2 & -0,1 \\ 1 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} -1,5 & -1,2 & 1,3 & -0,1 \\ 0,5 & -1,2 & -2 & 0,9 \\ 1,2 & 0,7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

então

$$M + N = \begin{bmatrix} 0,5 & 2 & 0,3 & 0,9 \\ 1,5 & 1 & 0 & 0,8 \\ 2,2 & 0,2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\triangle$

Oposição de uma Matriz.

Seja M uma *matriz real de dimensão* $n \times k$. A *matriz oposta de* M é a *matriz real,* $-M$, *de dimensão* $n \times k$, definida por

$$(-M)[i,j] = -M[i,j] \text{ para quaisquer } 1 \leq i,j \leq n\ .$$

Por exemplo, se

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3,2 & -1 & 1 \\ 1 & 2,2 & 2 & -0,1 \\ 1 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$-M = \begin{bmatrix} -2 & -3,2 & 1 & -1 \\ -1 & -2,2 & -2 & 0,1 \\ -1 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

Transposição de uma Matriz.

Seja M uma *matriz real de dimensão* $n \times k$. A *matriz transposta de* M é a *matriz real*, M^T , *de dimensão* $n \times k$ definida por

$$M^T[i,j] = M[j,i] \text{ para quaisquer } 1 \leq i,j \leq n \; .$$

Por exemplo, se

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3,2 & -1 & 1 \\ 1 & 2,2 & 2 & -0,1 \\ 1 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

então

$$M^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3,2 & 2,2 & -0,5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -0,1 & 0 \end{bmatrix} .$$

$\triangle$

Produto de Matrizes.

Seja M uma *matriz real de dimensão* $n \times k$, e N uma *matriz real de dimensão* $k \times m$. O *produto* $M.N$ é a *matriz real de dimensão* $n \times m$ definida por

$$(M.N)[i,j] = \sum_{u=1}^{k} M[i,u].N[u,j] \text{ para quaisquer } 1 \leq i \leq n \; , \; 1 \leq j \leq m \; .$$

A soma acima é o *produto interno* de

$$M[i,\cdot] = \begin{bmatrix} M[i,1] & M[i,2] & \ldots & M[i,k] \end{bmatrix} \; , \; 1 \leq i \leq n \; .$$

por

$$N^T[\cdot,j] = \begin{bmatrix} N[1,j] & N[2,j] & \ldots & M[k,j] \end{bmatrix} \; , \; 1 \leq j \leq m \; .$$

Cálculo do Produto Interno.

$$\begin{array}{ccccccc} M[i,1] & & \text{M[i,2]} & \ldots & \text{M[i,k]} & & \\ \times & & \times & \ldots & \times & & \\ N[1,j] & & N[2,j] & \ldots & N[k,j] & & \\ = & & = & \ldots & = & & \\ M[i,1].N[1,j] \; + & & M[i,2].N[2,j] \; + & \ldots & + \; M[i,k].N[k,j] & = & M.N[i,j] \end{array}$$

Por exemplo, se

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\; e \;\; N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} ,$$

$M.N[2,1]$ é obtido da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lccccccc}
M[2,\cdot]: & 1 & 2 & 2 & & -1 & & \\
& \times & \times & \times & & \times & & \\
N^T[\cdot,1]: & 1 & 0 & 3 & & 2 & & \\
& = & = & = & & = & & \\
& 1\,+ & 0\,+ & 6\,+ & & +\,(-2) & = & 5 = M.N[2,1].
\end{array}
$$

Calculando esses produtos para os demais entradas (i,j), $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, obtem-se:

$$
M.N = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$\triangle$