

Sobre a unicidade da solução em programação não linear

Walter Figueiredo Mascarenhas

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
LIVRE DOCENTE

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2010

Agradecimentos

A Nathalie e Daniel.

Resumo

Discutimos a unicidade dos minimizadores locais para problemas de programação não linear. Em geral tais problemas tem múltiplos minimizadores locais. Porém, em alguns contextos específicos de grande relevância prática e teórica é desejável que haja um único minimizador local. Nosso propósito é estabelecer critérios e fornecer ferramentas para analisar estes problemas específicos.

Nossa motivação vem principalmente de [Mäkeläinen et al. \(1981\)](#). Este artigo discute a questão da unicidade de soluções para problemas fundamentais em estatística. Motivados por ele desenvolvemos técnicas para lidar com problemas restritos, visando inicialmente o problema prático da tese de dissertação [Machado \(2009\)](#). Em seguida desenvolvemos a teoria geral exposta aqui.

Apesar da motivação prática, esta tese é teórica. Analisamos a unicidade dos pontos de vista diferencial e topológico. Relacionamos a unicidade de minimizadores locais à conectividade dos conjuntos $f_{<c} = \{x \text{ com } f(x) < c\}$ e mostramos que esta conectividade está ligada a não existência de *Pontos de Conexão*. Apresentamos então critérios semelhantes aos usados na análise de minimizadores locais em programação não linear clássica (como qualificação de restrições e condições nas matrizes Jacobianas e Hessianas) para julgar se um ponto dado é ou não um Ponto de Conexão. O resultado final é uma teoria tão completa e abrangente quanto a teoria usual para lidar com minimização, que se estende naturalmente para espaços de Banach e espaços métricos completos.

Além da teoria de programação não linear, no nível de generalidade de [Borwein \(1986\)](#), fomos influenciados pelos trabalhos [Hofer \(1984\)](#), [Hofer \(1985\)](#), [Ghoussoub e Preiss \(1989\)](#), [Pucci e Serrin \(1984\)](#), [Pucci e Serrin \(1985\)](#) e [Pucci e Serrin \(1987\)](#) a respeito do Mountain Pass Lemma. Esta tese pode ser resumida como uma combinação das idéias nas referências acima com definições e provas novas de modo a formar um todo coerente que permite a análise da unicidade de minimizadores locais para problemas específicos.

Palavras-chave: Minimizadores locais, unicidade, programação não linear.

Abstract

We discuss the uniqueness of local minimizers for nonlinear programming problems. In general such problems have multiple local minimizers. However, in some specific problems of great practical and theoretical relevance it is desirable to have a unique local minimizer. Our purpose is to establish criteria and provide tools to analyse these specific problems.

Our motivation comes mainly from [Mäkeläinen *et al.* \(1981\)](#). This thesis discusses the uniqueness of solutions for fundamental problems in statistics. Motivated by it we developed techniques to handle constrained problems, aiming initially at the practical problem in the master thesis [Machado \(2009\)](#). We then developed the general theory exposed here.

This thesis's motivation is practical, but it is theoretical. We analyse the uniqueness of local minimizers from the differential and topological points of view. We relate the uniqueness of local minimizers to the connectivity of the sets $f_{<c} = \{x \text{ com } f(x) < c\}$ and show that this connectivity depends on the non existence of *Connection Points*. We then present criteria similar to the ones in classical non linear programming theory (constraint qualifications and conditions on the Jacobian and Hessian matrices) to decide wether a given point is a Connection Point. The final result is a complete theory as broad as the usual theory regarding minimization, which can be extended naturally to Banach spaces and complete metric spaces.

Besides nonlinear programming theory, in the generality level of [Borwein \(1986\)](#), we were influenced by the works [Hofer \(1984\)](#), [Hofer \(1985\)](#), [Ghoussoub e Preiss \(1989\)](#), [Pucci e Serrin \(1984\)](#), [Pucci e Serrin \(1985\)](#) and [Pucci e Serrin \(1987\)](#) about the Mountain Pass Lemma. This thesis can be summarized as a combination of the ideas in these references with new definitions and proofs to form a coherent theory with allows us to analyse the question of uniqueness of local minimizers for specific problems.

Keywords: Local minimizers, uniqueness, nonlinear programming.

Sumário

Lista de Símbolos	xi
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Provas do capítulo 1	4
2 Conceitos básicos	5
2.1 Provas do capítulo 2	9
3 Unicidade do minimizador local em $\mathbb{R}^n$	13
3.1 Provas do capítulo 3	16
4 O Lema da Conexão em espaços de Banach	17
4.1 Provas do capítulo 4	19
5 O Lema da Conexão em espaços métricos completos	33
5.1 Provas do capítulo 5	34
6 O Lema da Conexão	35
6.1 Provas do capítulo 6	39
7 Funções com conjuntos de nível conexos	43
7.1 Provas do capítulo 7	44
A Topologia	47
A.1 Espaços Topológicos Normais	47
A.2 A propriedade de Hausdorff	48
A.3 Provas do apêndice	49
Referências Bibliográficas	53
Índice Remissivo	57

Lista de Símbolos

$\overline{A}$	Fecho do conjunto A , que é definido como $\bigcap_{B \supset A, B \text{ fechado}} B$.	
$A - B$	$\{x \text{ tal que } x \in A \text{ e } x \notin B\}$	
A^c	$F - A$, onde F é um espaço topológico dado pelo contexto.	
(a, b)	Intervalo aberto com extremos a e b (não usamos pares ordenados nesta tese.)	
$[a, b)$	Intervalo $\{x \in \mathbb{R} \text{ com } a \leq x < b\}$.	
αX	Compactificação de Alexandroff do espaço topológico X .	
$\mathbb{B}_\delta(x_0)$	Bola de centro x_0 e raio δ .	
$\mathbb{B}_\delta$	Bola de centro 0 e raio δ .	fs
$f_{<c}$	$\{x \text{ tal que } f(x) < c\}$.	
$f_{\leq c}$	$\{x \text{ tal que } f(x) \leq c\}$.	
$f_{>c}$	$\{x \text{ tal que } f(x) > c\}$.	
$f_c^{\min}$	Conjuntos dos minimizadores locais x de f tais que $f(x) = c$.	
$T_C(x_0)$	Cone Tangente de Clarke do conjunto C no ponto x_0 .	
$\mathcal{C}(x, C)$	$\bigcup_{A \subset C \text{ conexo com } x \in A}$	
$\text{Span}(A)$	subespaço gerado pelos elementos do conjunto A .	

Lista de Figuras

2.1	Os minimizadores estritos u e w e o Ponto de Conexão v	6
2.2	Mountain Pass Points podem não ser Pontos de Conexão	6
2.3	Um Terraço e uma Ponte.	7

Capítulo 1

Introdução

Esta tese apresenta critérios topológicos e diferenciais para decidir se o programa não linear

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{sujeito a } & g(x) \in G \end{aligned} \tag{1.1}$$

tem um único minimizador local. A nossa abordagem é geral no sentido que o domínio das funções f e g e o conjunto G podem ser subconjuntos de um espaço de Banach ou mesmo de um espaço topológico mais abstrato. Discutimos os aspectos topológicos da unicidade em profundidade e generalidade e propomos ferramentas para verificá-la em problemas específicos.

É útil saber que o problema (1.1) tem uma única solução local quando o tratamos numericamente, pois esta informação nos permite escolher algoritmos mais simples e eficientes para resolvê-lo. Unicidade também é importante sob o ponto de vista da modelagem matemática dos problemas práticos. Ela nos dá mais certeza que nosso modelo está bem formulado e descreve corretamente o mundo real, no qual freqüentemente esperamos obter soluções únicas e claramente definidas.

Por estas razões práticas os estatísticos e economistas que escreveram [Mäkeläinen *et al.* \(1981\)](#), [Orme e Ruud \(2002\)](#) e [Tarone e Gruenhage \(1975\)](#) desenvolveram e estudaram critérios para provar a unicidade de soluções locais no contexto de maximização de verossimilhança e os aplicaram com sucesso a problemas significantes das suas áreas. Esta tese generaliza, formaliza e explica em detalhe a matemática por trás destes resultados. Por isso, para apreciar a efetividade da abordagem que apresentamos você deve ler pelo menos [Mäkeläinen *et al.* \(1981\)](#).

Nosso estudo da unicidade dos minimizadores começa com a observação que esta unicidade está diretamente ligada à conectividade dos conjuntos

$$f_{<c} = \{x \text{ with } f(x) < c\} \quad \text{and} \quad f_{\leq c} = \{x \text{ with } f(x) \leq c\},$$

onde o conceito de conectividade é formalizado no sentido topológico usual:

Definição 1.0.1 *Seja F um espaço topológico. Dizemos que $C \subset F$ é conexo se para todos conjuntos abertos A e B tais que $C \subset A \cup B$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$ temos que $A \cap C = \emptyset$ ou $B \cap C = \emptyset$.*

Com o intuito de enfatizar a relação entre conectividade e unicidade, nós introduzimos o *Lema da Conexão* como uma ferramenta para analisar a conectividade dos conjuntos $f_{<c}$. Este lema é uma adaptação do Mountain Pass Lemma clássico. O próximo teorema relaciona a unicidade de minimizadores locais com a conectividade dos conjuntos $f_{<c}$ e com o Lema da Conexão:

Teorema 1.0.1 *Seja F um espaço topológico normal e Hausdorff e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com minimizadores locais estritos. Se os conjuntos $f_{\leq c}$ são compactos então f tem um único minimizador local se e somente se os conjuntos $f_{< c}$ são conexos.* $\square$

Teorema 1.0.2 *Seja F um espaço topológico normal e conexo e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com minimizadores locais estritos. Se os conjuntos $f_{\leq c}$ são compactos então os conjuntos $f_{< c}$ são conexos se e somente se f não tem Pontos de Conexão.* $\square$

Os teoremas acima se baseiam nestas definições:

Definição 1.0.2 *Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x é um minimizador local estrito de f se ele pertencer a um conjunto aberto A tal que $f(y) > f(x)$ para todo $y \in A - \{x\}$.* $\square$

Definição 1.0.3 *Dizemos que um espaço topológico F tem a propriedade de Hausdorff (ou é Hausdorff) se para todo par de pontos $x_1, x_2 \in F$ distintos existirem conjuntos abertos disjuntos A_1 e A_2 tais que $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$.* $\square$

Definição 1.0.4 *Um espaço topológico F é normal se para todo par de conjuntos fechados disjuntos A_1 e $A_2 \subset F$ existirem conjuntos abertos disjuntos B_1 e B_2 tais que $A_1 \subset B_1$ e $A_2 \subset B_2$.* $\square$

Normalidade é um conceito clássico de topologia e é discutido em praticamente todos livros de topologia geral (veja por exemplo [Dugundji \(1966\)](#) ou [Engelking \(1989\)](#)). A região factível da vasta maioria dos problemas de programação não linear interessantes é normal e normalidade é a hipótese mínima que necessitamos para desenvolver a teoria sobre Pontos de Conexão descrita nesta tese. É por isso que nós lidamos com espaços normais. Porém, o foco desta tese não é topologia e você pode ler “espaço topológico normal” como “a região factível de qualquer programa não linear razoável”. A propriedade de Hausdorff é usualmente assumida, mesmo quando ela é supérflua. O apêndice é dedicado à discussão da Propriedade de Hausdorff e normalidade e ao longo do texto explicitaremos quando elas são necessárias.

Para entender o teorema 1.0.2 você precisa saber o que são *Pontos de Conexão*. Você pode pensar neles como pontos cuja existência é garantida pelo Lema da Conexão. O sentido exato não é relevante no momento. Por enquanto certifique-se apenas que você entende o caso mais básico coberto por nossa teoria: quando f é contínua e F é normal, Hausdorff e conexo temos que

Equivalência 1.0.1 *Minimizadores locais estritos e conjuntos $f_{\leq c}$ compactos implicam que: Minimizador local único $\iff$ Os conjuntos $f_{< c}$ são conexos $\iff$ Não há Pontos de Conexão.*

Sob as hipóteses dos teoremas acima podemos provar que há apenas um minimizador local mostrando que não há Pontos de Conexão. Este é o argumento principal que usaremos no resto desta tese e nós o expandiremos e exploraremos em detalhe. Provaremos e generalizaremos os teoremas acima e explicaremos porque suas hipóteses são necessárias. Além disso, apresentaremos ferramentas para aplicar teoremas desta natureza a problemas típicos de programação não linear, cuja região factível é obtida pela aplicação restrições de igualdade e desigualdade a conjuntos convexos.

O conceito de Ponto de Conexão é uma das contribuições originais desta tese, mas o artigo aplicado [Mäkeläinen et al. \(1981\)](#) que nos motivou apresenta um argumento intuitivo correto que

usa implicitamente este conceito e é evidente que os autores deste artigo entendem o espírito do Lema da Conexão. Infelizmente, eles focam em matrizes Hessianas positivas definidas e falam superficialmente sobre Teoria de Morse, em uma abordagem que hoje nós encaramos como inapropriada. Enquanto seguíamos a mesma trilha encontramos os trabalhos [Hofer \(1984\)](#), [Hofer \(1985\)](#), [Fang \(1994\)](#), [Ghoussoub e Preiss \(1989\)](#), [Pucci e Serrin \(1984\)](#), [Pucci e Serrin \(1985\)](#), [Pucci e Serrin \(1987\)](#) e [Ekeland e Ghoussoub \(2002\)](#) e ficou claro que a questão da unicidade de minimizadores locais é melhor abordada através do Mountain Pass Lemma, sem a necessidade de todos os detalhes e sutilezas da Teoria de Morse completa.

Os autores dos artigos mencionados no fim do último parágrafo usam o Mountain Pass Lemma para provar a existência de soluções múltiplas para problemas variacionais, seguindo os trabalhos fundamentais [Birkhoff \(1917\)](#), [Ljusternik e Schnirelmann \(1929\)](#), [Ljusternik e Schnirelmann \(1934\)](#) e [Morse \(1934\)](#), que deram origem às teorias de Ljusternik & Schnirelmann e Morse e a inúmeros resultados profundos em matemática pura e aplicada. O nosso objetivo é diferente: queremos provar a unicidade de soluções. Por isso propomos algumas pequenas modificações nos conceitos relacionados ao Mountain Pass Lemma. Esta tese apresenta estas modificações e ilustra como elas podem ser utilizadas para lidar com problemas típicos de programação não linear.

O nosso Lema da Conexão é uma pequena modificação do Mountain Pass Lemma, que é usualmente explicado em termos de caminhos ligando pontos a e b tais que $f(a)$ e $f(b)$ estão abaixo de um certo nível crítico c . Muitos autores consideram o espaço métrico completo

$$\Gamma(a, b) = \{x \in C([0, 1], F) \text{ tal que } x(0) = a \text{ e } x(1) = b\}$$

e usam o princípio variacional de Ekeland para analisar o funcional $\Phi : \Gamma(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(x) = \max_{t \in [0, 1]} f(x(t)).$$

A partir desta análise eles provam a existência de pontos críticos com algumas características (veja [Borwein e Zhu \(2005\)](#)). Nós propomos uma abordagem alternativa. Para nós o Mountain Pass Lemma é apenas indiretamente relacionada a caminhos. O que realmente importa é conectividade, não conectividade por caminhos. Esperamos convencer o leitor que persistir até o capítulo 6 que a existência dos pontos críticos do tipo descrito pelo Mountain Pass Lemma é um fenômeno puramente topológico e que hipóteses como a condição de Palais Smale são apenas lentes diferenciais para observá-lo. Na verdade, como a essência da questão é puramente topológica, nós podemos analisá-la a partir de princípios básicos, como o Lema de Zorn.

Procuramos organizar a tese em ordem crescente de complexidade. O próximo capítulo apresenta os conceitos básicos usados nos demais capítulos. Estes conceitos são definidos para espaços topológicos normais mas também apresentamos gráficos e exemplos concretos, no $\mathbb{R}^n$. Este capítulo mostra que há duas vertentes na análise da unicidade de minimizadores locais: (i) funções com pelo um conjunto de nível desconexo certamente tem múltiplos minimizadores locais (ii) funções com conjuntos de nível conexos podem ter múltiplos minimizadores locais, mas sua análise é um pouco mais simples. O capítulo 3 discute a unicidade de minimizadores locais em $\mathbb{R}^n$. Enunciamos lemas e teoremas e mostramos como eles podem ser combinados com qualificações de restrições para provar a unicidade de minimizadores locais para problemas de programação não linear com um número finito de variáveis e restrições. Este capítulo motiva e prepara o terreno para a abordagem mais

abstrata dos capítulos seguintes. Nos capítulos 4, 5 e 6 tratamos do caso (i) para espaços de Banach, espaços métricos completos e espaços topológicos, nesta ordem. O resultado básico destes três capítulos são versões do Lema da Conexão, enunciadas em nível crescente de generalidade. No capítulo 7 analisamos funções com conjuntos de nível conexos.

Cada capítulo, incluindo essa introdução, termina em uma seção com as provas dos teoremas e lemas enunciados naquele capítulo, com os teoremas precedendo os lemas. Muitas provas usam o resultado de capítulos seguintes e para compreendê-las você precisará avançar no texto. Esta foi uma escolha deliberada para motivar a leitura dos resultados mais gerais e exemplificar a sua aplicabilidade em casos mais concretos. Você pode verificar se esta abordagem é boa já na próxima seção. Boa leitura.

1.1 Provas do capítulo 1

Prova do teorema 1.0.1 Os conjuntos $f_{\leq c}$ são compactos e o comentário após a definição 6.0.6 mostra que f satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale. Os conjuntos $f_c^{\min}$ definidos em 6.0.7 são relativamente compactos pelo lema A.2.6. Além disso, como os minimizadores locais de f são estritos, o lema 2.0.3 mostra que não há Plateaus ou Terraços (veja a definição 2.0.4). Isto exclui a possibilidade (iv) na Alternativa de Conexão definida em 2.0.7. Se todos os conjuntos $f_{< c}$ são conexos então o teorema 7.0.2, o lema 7.0.2 e as observações acima mostram que f tem um único minimizador local. Por outro lado, se para algum c o conjunto $f_{< c}$ é desconexo então existe uma partição aberta $f_{< c} = A_1 \cup A_2$ e os conjuntos $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ são compactos pelo lema A.2.6. Além disso, se $x \in \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 - (A_1 \cup A_2)$ então pela continuidade de f devemos ter $f(x) = c$ e x não pode ser um minimizador de f nem em $\overline{A}_1$ nem em $\overline{A}_2$. Pela compacticidade de $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$, f tem pelo menos um minimizador local em A_1 e em A_2 e o último argumento mostra que eles são distintos. $\square$

Prova do theorem 1.0.2 Se f tem um ponto de conexão x então pela definição 2.0.3 há uma partição aberta $f_{< f(x)} = A_1 \cup A_2$ e $f_{< f(x)}$ é desconexo. Por outro lado, se algum conjunto de nível $f_{< a}$ é desconexo então, dada a compacticidade dos conjuntos $f_{< c}$, podemos usar o lema 6.0.1 com $c = +\infty$ para concluir que f tem uma Ponte ou um Ponto de Conexão. Porém, o lema 2.0.4 e a hipótese de que os mínimos locais de f são estritos mostram que f não tem Pontes. Isto mostra que se algum conjunto $f_{< a}$ for desconexo então f tem um Ponto de Conexão e esta prova está completa. $\square$

Capítulo 2

Conceitos básicos

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos que norteiam a nossa discussão da unicidade dos minimizadores locais. Você certamente encontrará modos alternativos de analisar esta questão e será capaz de provar nossos resultados usando outros meios. Porém, nosso objetivo é apresentar uma abordagem genérica e uniforme, que se aplique tanto em problemas corriqueiros como em problemas abstratos. Esperamos ainda que esta abordagem se baseie em critérios de uso corrente, como qualificação de restrições, condições na matriz Jacobiana e no espectro da matriz Hessiana. Após meditarmos sobre este problema concluímos que este objetivo pode ser alcançado através da caracterização topológica da unicidade via a conectividade dos conjuntos de nível $f_{<c}$. Ao ler os demais capítulos desta tese você poderá julgar por si mesmo até que ponto esse início topológico pode nos levar.

Acreditamos que a unicidade deve ser abordada em dois passos: primeiro devemos descobrir se os conjuntos $f_{<c} = \{x \in F \text{ com } f(x) < c\}$ são conexos. Se $f_{<c}$ é desconexo então existem conjuntos abertos disjuntos A_1 e A_2 tais que $f_{<c} \subset A_1 \cup A_2$ e f deve ter um minimizador local em A_1 e outro em A_2 , pelos motivos expostos na prova do teorema 1.0.1. Portanto, se algum conjunto $f_{<c}$ é desconexo então f tem múltiplos minimizadores locais. Uma vez que passamos este teste podemos lidar com o caso no qual todos os conjuntos $f_{<c}$ são conexos.

Nesta tese propomos o *Lema da Conexão* como uma ferramenta fundamental para analisar a conectividade dos conjuntos $f_{<c}$. Na sua forma mais simples, em $\mathbb{R}$, o Lema da Conexão é exatamente igual ao clássico Mountain Pass Lemma e eles podem ser enunciados assim:

Lema 2.0.1 *Se a função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem dois minimizadores locais u e w , com $u < w$, então ela também tem um maximizador local $v \in (u, w)$. $\square$*

Pesquisadores nas áreas de equações diferenciais parciais e sistemas Hamiltonianos usam a informação que u e w são minimizadores locais e o Mountain Pass Lemma para provar a existência de v , que corresponde a uma solução adicional dos seus problemas variacionais. Ambrosetti e Rabinowitz introduziram o Mountain Pass Lemma em [Ambrosetti e Rabinowitz \(1973\)](#) tendo em vista este tipo de aplicação e seu trabalho foi generalizado em [Ekeland e Ghoussoub \(2002\)](#), [Ekeland e Hofer \(1985\)](#), [Fang \(1994\)](#), [Ghoussoub e Preiss \(1989\)](#), [Hofer \(1984\)](#), [Hofer \(1985\)](#), [Pucci e Serrin \(1984\)](#), [Pucci e Serrin \(1985\)](#), [Pucci e Serrin \(1987\)](#) e [Shuzhong \(1985\)](#) com o mesmo propósito.

Focamos na recíproca do Lema da Conexão: no caso unidimensional, se conseguirmos provar que f não tem maximizadores locais então o lema 2.0.1 nos dirá que f tem no máximo um minimizador local. Isto é difícil em geral, mas [Mäkeläinen et al. \(1981\)](#) e [Orme e Ruud \(2002\)](#) apresentam situ-

ações concretas nas quais é possível obter resultados neste sentido mesmo em $F = \mathbb{R}^n$. Entretanto, no caso geral o ponto v cuja existência é provada usando o Lema da Conexão ou o Mountain Pass Lema não é um maximizador local. Em situações favoráveis ele será o que Katriel (1994), motivado por Hofer (1985), define como um Mountain Pass Point:

Definição 2.0.1 *Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $x \in F$ é um Mountain Pass Point se para toda vizinhança V de x o conjunto $f_{<f(x)} \cap V$ é desconexo.* $\square$

Nossa abordagem é ligeiramente diferente da de Hofer e Katriel. Estamos interessados na conectividade dos conjuntos $f_{<c}$ e sua relação com a unicidade dos minimizadores locais. Nosso trabalho se baseia nesta definições:

Definição 2.0.2 *Seja F um espaço topológico e A, B e C subconjuntos de F . Dizemos que $C = A \cup B$ é uma partição de C se A e B são disjuntos e não vazios. Se A e B são abertos dizemos que $C = A \cup B$ é uma partição aberta e se A e B são fechados dizemos $C = A \cup B$ é fechada.* $\square$

Definição 2.0.3 *Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $x \in F$ é um Ponto de Conexão para f se existir uma partição aberta $f_{<f(x)} = A \cup B$ tal que $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.* $\square$

Em geral omitiremos o “para f ” ao nos referirmos a Pontos de Conexão pois a função f estará claramente especificada pelo contexto.



Figura 2.1: Os minimizadores estritos u e w e o Ponto de Conexão v .

A figura 2.1 apresenta Pontos de Conexão típicos: um maximizador local em $\mathbb{R}$ e uma sela em $\mathbb{R}^n$, para $n > 1$, na qual o Hessiano tem exatamente um autovalor negativo. Todo Ponto de Conexão x é um Mountain Pass Point porque se V é uma vizinhança de x então podemos particionar $f_{<c} \cap V$ como $(V \cap A) \cup (V \cap B)$, onde A e B são os conjuntos abertos na definição 2.0.3. Entretanto, o próximo exemplo mostra que um Mountain Pass Point pode não ser um Ponto de Conexão:

Exemplo 2.0.1 *Seja $F \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto compacto e conexo descrito na figura 2.2 abaixo, na qual “...” indicam os segmentos com pontos extremos $(-2^{-k}, 0)$ e $(-2^{-k}, 1)$ para $k \in \mathbb{N}$ e seja $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ a função linear dada por $f(x, y) = 9y + x$. O ponto z é um Ponto de Conexão, porque $f(z) = 0$, $f_{<0} = A_1 \cup A_2$ para $A_1 = f_{<0} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ com } x > y\}$ e $A_2 = f_{<0} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ com } x < y\}$,*

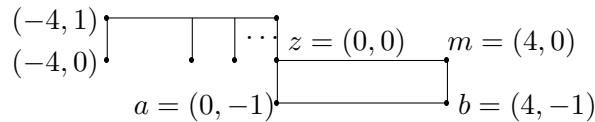
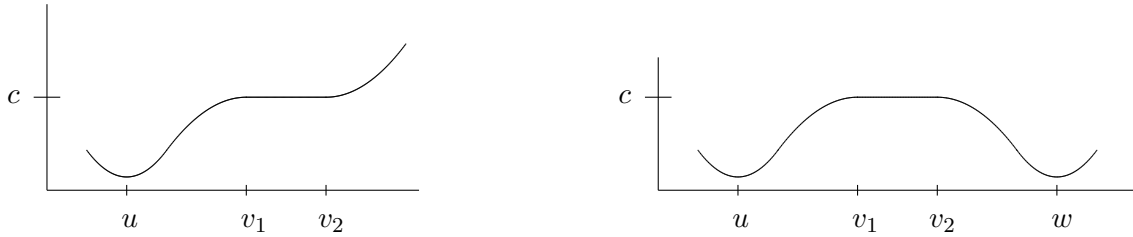


Figura 2.2: Mountain Pass Points podem não ser Pontos de Conexão

os conjuntos A_1 e A_2 são abertos em F e $z \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. A situação de m é diferente. Ele é um *Mountain Pass Point* porque há dois tipos de vizinhanças N e M de m : as que contêm z e as outras. Note que $f(m) = 4$ e em ambos os casos podemos particionar $N \cap f_{<4}$ como exigido na definição 2.0.1. De fato, se $z \in N$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{<4} \cap N = (B_1 \cap N) \cup (B_2 \cap N)$ com $B_1 = f_{<4} \cap \{(x, y) \text{ com } 2^k x > -3\}$ e $B_2 = f_{<4} \cap \{(x, y) \text{ com } 2^k x < -3\}$. Se $z \notin N$ então $f_{<4} \cap N = (C_1 \cap N) \cup (C_2 \cap N)$ com $C_1 = f_{<4} \cap \{(x, y) \text{ com } y < 0\}$ e $C_2 = f_{<4} \cap \{(x, y) \text{ com } y > x\} \cup \{(x, y) \text{ com } x \in (0, 4) \text{ e } 2y > -1\}$. Porém, m não é um Ponto de Conexão, pois se $D_1 \cup D_2$ é uma partição aberta de $f_{<4}$ então um dos D_i 's contém o caminho $(m, z) \cup [z, a) \cup [a, b) \cup [b, m)$ e m não pertence ao fecho do outro D_i . $\square$

Pontos de Conexão não contam toda a história sobre a unicidade dos minimizadores locais. A figura 2.3 mostra porque a exigência de minimizadores locais estritos é essencial nos teoremas 1.0.1 e 1.0.2. Não há Pontos de Conexão nesta figura. Porém, no gráfico da esquerda todos os conjuntos $f_{<a}$ são conexos e os minimizadores locais no nível c formam um conjunto conexo com fecho compacto que toca $\overline{f_{<c}}$. O gráfico da direita contém um intervalo de minimizadores locais x com $f(x) = c$ conectando componentes conexas distintas de $f_{<c}$.



O minimizador global u e o Terraço (v_1, v_2) :
Conjuntos de nível conexos mas múltiplos
minimizadores locais.

As componentes $A_1 = (-\infty, v_1)$ e $A_2 = (v_2, +\infty)$
de $f(x) < c$ e a Ponte (v_1, v_2) conectando-as.

Figura 2.3: Um Terraço e uma Ponte.

Os gráficos na figura 2.3 descrevem a essência dos piores cenários para funções contínuas com conjuntos de nível compactos. Apresentamos agora definições técnicas para analisá-las:

Definição 2.0.4 Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que o conjunto P é um Plateau para f no nível c se

- (i) $P \subset f^{-1}(c)$,
- (ii) P é conexo,
- (iii) $\overline{P}$ tem pelo menos dois elementos.
- (iv) Os elementos de P são minimizadores locais de f . $\square$

Definição 2.0.5 Um Plateau P para f no nível c será chamado de Terraço se $\overline{P} \cap \overline{f_{<c}} \neq \emptyset$. $\square$

Definição 2.0.6 Seja $f_{<c} = A_1 \cup A_2$ uma partição aberta com $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Dizemos que $P = f_{<c} - \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ é uma Ponte se não existirem conjuntos P_1 e P_2 tais que $P = P_1 \cup P_2$ e $(\overline{A_1} \cup \overline{P_1}) \cap (\overline{A_2} \cup \overline{P_2}) = \emptyset$. $\square$

O intervalo $T = (v_1, v_2)$ no gráfico da esquerda na figura 2.3 é o Plateau mais simples: um caminho formado por minimizadores locais. Entretanto, Plateaus podem ser muito mais complexos. De fato, usando o teorema de Baire é possível provar a existência de um Plateau $P \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{P}$ é compacto e não contém caminho algum (veja Thomson *et al.* (2001)). O Plateau T acima é um Terraço porque $\overline{T}$ toca $\overline{f_{<c}}$. Quando o espaço F é não Hausdorff, Plateaus podem ser formados por um único minimizador estrito. Porém, em espaços normais e Hausdorff Plateaus contém uma infinidade de minimizadores não estritos, como ilustrado no próximos lemas:

Lema 2.0.2 *Considere o espaço topológico dado pelo conjunto $F = \{x \in \mathbb{R} \text{ com } 0 \leq x \leq 1\} \cup \{\infty\}$ e conjuntos abertos de dois tipos:*

- (i) *Um conjunto aberto em $[0, 1]$ que não contém 1.*
- (ii) *Um conjunto aberto em $[0, 1]$ unido com ∞ .*

e a função $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ e $f(\infty) = 1$. O conjunto F com a coleção de abertos acima é um espaço topológico normal, compacto e conexo, a função f é contínua e os conjuntos $f_{<c}$ são conexos e f tem dois minimizadores locais, 0 e ∞ , e ambos são estritos. F não é Hausdorff pois 1 e ∞ não podem ser separados. $\square$

Lema 2.0.3 *Seja F um espaço topológico, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e P é um Plateau para f . Se F é Hausdorff então P é infinito. Se F for também normal então todos elementos de P são mínimos locais não estritos.* $\square$

O intervalo $P = (v_1, v_2)$ no gráfico da direita na Figure 2.3 é uma Ponte. Ele conecta os componentes A_1 e A_2 de $f_{<c}$ e não pode ser dividido em duas partes P_1 e P_2 tais que $\overline{A_1} \cup \overline{P_1}$ e $\overline{A_2} \cup \overline{P_2}$ definem uma partição fechada de $f_{\leq c}$ (se existissem, tais P_1 e P_2 levariam a uma partição aberta $(v_1, v_2) = ((v_1, v_2) - \overline{P_1}) \cup ((v_1, v_2) - \overline{P_2})$ do intervalo (v_1, v_2) , que é conexo.)

Se P é uma ponte no nível c então como $P = f_{\leq c} - \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = f_{\leq c} - \overline{f_{<c}}$ é claro que todo $x \in P$ satisfaz $f(x) = c$ e é um minimizador local de f . A remoção da ponte P desconecta $f_{\leq c}$ e ela não pode ser decomposta em partes P_1 e P_2 tais que $\overline{A_1} \cup \overline{P_1}$ e $\overline{A_2} \cup \overline{P_2}$ definem uma partição fechada de $f_{\leq c}$. Além disso, em espaços normais, Pontes contém uma infinidade de minimizadores degenerados:

Lema 2.0.4 *Seja F um espaço topológico, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se P é uma Ponte no nível $c \in \mathbb{R}$ então P é o conjunto dos minimizadores locais de f no nível c . Além disso, se F é normal então P contém um conjunto infinito de minimizadores locais não estritos.* $\square$

Terraços anulam a primeira equivalência em (1.0.1) e Pontes invalidam a segunda. Na realidade, para funções contínuas em espaços normais compactos temos que

Minimizador local único $\Leftrightarrow$ Os conjuntos $f_{<c}$ são conexos $\Leftrightarrow$ não há Pontos de Conexão.

Ainda assim podemos relacionar Pontes e Pontos de Conexão a mudanças na conectividade dos conjuntos de nível, como ilustrado na primeira versão do Lema da Conexão: ¹:

¹Veja Ekeland e Ghoussoub (2002), Fang (1994), Ghoussoub e Preiss (1989), Hofer (1985), Pucci e Serrin (1984), Pucci e Serrin (1985) e Pucci e Serrin (1987) para teorema análogos envolvendo Mountain Pass Points.

Teorema 2.0.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se os conjuntos $f_{<c}$ são limitados, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f_{\leq a}$ é desconexo e $b \in (a, +\infty]$ tal que $f_{<b}$ é conexo então f tem um Ponto de Conexão ou uma Ponte em $f^{-1}((a, b))$.* $\square$

Como consequência da existência de Pontes e Terraços, para usar argumentos de conectividade para provar que há um único mínimo local mostramos que f satisfaz a *Alternativa da Conectividade* enunciada abaixo e usamos características adicionais de f e seu domínio para mostrar que os itens (ii)–(iv) desta alternativa não são viáveis (veja as provas no capítulo anterior).

Definição 2.0.7 *Seja F um espaço topológico e seja $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que f satisfaz a **Alternativa da Conectividade** se ela tem um minimizador global x_0 e pelo menos uma das alternativas seguintes ocorre:*

- (i) x_0 é o único minimizador local de f ,
- (ii) f tem um Ponto de Conexão,
- (iii) f tem uma Ponte,
- (iv) Para todo $c \in \mathbb{R}$ os conjuntos $f_{<c}$ and $f_{\leq c}$ são conexos. Há um minimizador local $w \neq x_0$ e para tais w 's
 - (a) Se $f(w) > f(x_0)$ então w pertence a um Terraço.
 - (b) Se $f(w) = f(x_0)$ então $f^{-1}(f(x_0))$ é um Plateau.

Um típico teorema seria então algo como:

Teorema 2.0.2 *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e conexo, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e os conjuntos $f_{\leq c}$ são limitados então f satisfaz a Alternativa da Conectividade.* $\square$

2.1 Provas do capítulo 2

Prova do teorema 2.0.1. Sejam $F = \overline{f_{<c}}$ e $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \max\{a, f(x)\}$. Como $g^{-1}(a) = f_{\leq a}$ é desconexo, g tem pelo menos dois minimizadores globais. O teorema 2.0.1 segue então do teorema 2.0.2 aplicado a g e F e da definição 2.0.7. $\square$

Prova do teorema 2.0.2. F , como todo subconjunto do $\mathbb{R}^n$, é um espaço métrico e portanto é normal. Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tem conjuntos de nível limitados então ela é limitada inferiormente e para todo c ela satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale definida em 6.0.6 e os conjuntos $f_c^{\min}$ na definição 6.0.7 são relativamente compactos. Segue então do lema 6.0.2 que f tem a Propriedade da Extensão 6.0.4 para todo c . Se todos os conjuntos $f_{<c}$ são conexos então o teorema 7.0.2 implica que f satisfaz o item (i) ou (iv) na definição 2.0.7. Se algum conjunto de nível $f_{<c}$ é desconexo então o lema 6.0.1 com $c = +\infty$ mostra que f satisfaz o item (ii) ou (iii) na definição 2.0.7. $\square$

Prova do lema 2.0.1. Seja m um maximizador global de f no intervalo fechado $[u, w]$. Se $m \in (u, w)$ então esta prova está completa. Se não, $m = u$ ou $m = w$. No primeiro caso deve existir $\epsilon > 0$ tal que $f(x) = f(u)$ para $x \in [u, u + \epsilon]$, pois u é um minimizador e um maximizador local. Qualquer $x \in (u, u + \epsilon)$ é um maximizador local. A análise do caso $m = w$ é análoga. $\square$

Prova do lema 2.0.2. Nesta prova usamos (i), (ii) e (iii) para nos referir aos itens correspondentes aos tipos de conjuntos abertos da hipótese. Para provar que F com os abertos dados é de fato um espaço topológico note que

- $\emptyset$ é aberto em $[0, 1]$ e não contém 1. Portanto, pelo item (i) $\emptyset$ é aberto.
- Como $[0, 1]$ é aberto em $[0, 1]$ e contém 1 o item (ii) mostra que F é aberto.
- Há quatro possibilidades para intersecção de dois abertos A e B : A é do tipo (i) e B é do tipo (i), A é do tipo (i) e B é do tipo (ii) etc. Analisando cada uma delas você verificará que $A \cap B$ é aberto nos quatro casos.
- Dada uma coleção $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ de conjuntos abertos temos duas possibilidades:
 1. Se todos A_λ forem do tipo (i) então $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ é um aberto do tipo (i).
 2. Se houver um A_λ do tipo (ii) então $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ é um aberto do tipo (ii).

Os itens (i) e (ii) mostram que não há aberto que contém 1 e não contém ∞ . Portanto F não é Hausdorff. Para provar que F é normal, note que há dois tipos de conjuntos fechados, correspondendo aos itens (i) e (ii)

F1: $A = B \cup \{\infty\}$, onde B é um fechado em $[0, 1]$ que contém 1.

F2: Um fechado em $[0, 1]$ que não contém 1.

Sejam então A_1 e A_2 fechados disjuntos. Temos então seguintes casos

- Se um deles, A_1 digamos, for do tipo F1, correspondendo a um conjunto B_1 então A_2 deve ser do tipo F2 e os conjuntos B_1 e A_2 são fechados disjuntos de $[0, 1]$, que é normal. Logo existem abertos disjuntos C_1 e C_2 em $[0, 1]$ tais que $B_1 \subset C_1$ e $A_2 \subset C_2$. Como $1 \in B_1 \subset C_1$ temos que $1 \notin C_2$ e C_2 é aberto em F . Além disso $D = C_1 \cup \{\infty\}$ é aberto em F , pois $1 \in B_1 \subset C_1 \subset D$. Logo, neste caso os fechados A_1 e A_2 são separados pelos abertos D e C_2 .
- Se A_1 e A_2 forem do tipo (ii) então ambos são conjuntos fechados em $[0, 1]$. Pela normalidade de $[0, 1]$ existem abertos B_1 e B_2 em $\mathbb{R}$ tais que $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ e $[0, 1] \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Os conjuntos $C_1 = B_1 \cap (-\infty, 1) \cap [0, 1]$ e $C_2 = B_2 \cap (-\infty, 1) \cap [0, 1]$ são abertos em $[0, 1]$ e não contém 1, logo eles são abertos em F pelo item 1. Além disso, C_1 e C_2 são disjuntos e $A_1 \subset C_1$ e $A_2 \subset C_2$.

F é compacto porque se $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura de F por abertos então existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que A_{λ_0} contém 1. Este A_{λ_0} deve ser do tipo (ii) e portanto $\infty \in A_{\lambda_0}$ e existe $a \in [0, 1]$ tal que $(a, 1] \subset A_{\lambda_0}$. Para cada A_λ o conjunto $B_\lambda = A_\lambda \cap [0, a]$ é aberto em $[0, a]$ e $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura de $[0, a]$ por abertos em $[0, a]$. Como $[0, a]$ é compacto existem $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $[0, a] \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\lambda_i}$. Isto mostra que $\{B_{\lambda_i}, i = 0, 1, \dots, n\}$ é uma subcobertura finita de F , que é de fato compacto.

F é conexo porque se $F = A \cup B$ com A e B são abertos então podemos assumir que $1 \in A$ e A deve ser do tipo (ii) e concluímos que $\infty \in A$ e $A = C \cup \{\infty\}$, onde C é um aberto em $[0, 1]$ que contém 1. Segue ainda que B deve ser um aberto em $[0, 1]$. Como $[0, 1]$ é conexo e $A \neq \emptyset$ isto implica que $B = \emptyset$ e F é de fato conexo.

Os conjuntos de nível $f_{<c}$ são conexos porque se $c \leq 1$ então $f_{<c} = [0, 1] \cap (-\infty, c)$ é conexo e se $c > 1$ então $f_{<c} = F$, que como já vimos é conexo.

A função f é contínua pois se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto então temos duas possibilidades

- Se $1 \notin A$ então $f^{-1}(A)$ é aberto porque $f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$ onde $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua $g(x) = x$.
- Se $1 \in A$ então $f^{-1}(A) = g^{-1}(A) \cup \{\infty\}$ é da forma (ii) pois $g^{-1}(A)$ é um aberto de $[0, 1]$ que contém 1.

Finalmente, 0 é um minimizador local estrito pois $[0, 1)$ é aberto e $f(0) = 0 < f(x)$ para todo $x \in [0, 1) - \{0\}$ e $\{\infty\} = \emptyset \cup \{\infty\}$ é um aberto do tipo (ii) e $f(\infty) = 1 < f(x)$ para todo $x \in \{\infty\} - \{\infty\} = \emptyset$. $\square$

Prova do lema 2.0.3. Seja P um Plateau no nível c . Se houver $x \in \overline{P} - P$ então usando o lema A.1.1 do apêndice e a propriedade de Hausdorff podemos construir uma seqüência $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ de abertos e uma seqüência x_n de pontos distintos em P com $x_n \in A_n - A_{n+1}$ e $A_{n+1} \subset A_n$. Isto mostra que P é infinito.

Suponhamos então que F é normal e x é um elemento de P . Como F é Hausdorff $\{x\}$ é um conjunto fechado. Seja então A um aberto contendo x . Mostramos agora que existe $y \in A - \{x\}$ tal que $f(y) = c$. Como A é qualquer isto mostra que A é não estrito. De fato, como os conjuntos $A^c = F - A$ e $\{x\}$ são fechados disjuntos e F é normal existem abertos disjuntos B_x e B tais que $x \in B_x$ e $A^c \subset B$. Note que $A^c \subset B$ implica que $B^c \subset A$. Portanto, $C = B^c - B_x \subset A$ e $x \notin C$, pois $x \in B_x$. Logo, se houver $y \in B^c - B_x$ com $f(y) = c$ então existe $y \in A - \{x\}$ com $f(y) = c$ e terminamos. Por outro lado, se $f(y) \neq c$ para todo $y \in B^c - B_x$ então, como $F = B_x \cup (B^c - B_x) \cup B$ e $f(y) = c$ para todo $y \in P$, temos que $P \subset B_x \cup B$. Como P é conexo, B_x e B são abertos e $x \in B_x$ concluímos que $P \subset B_x$. Como P é infinito deve haver pelo menos outro $y \in P \cap B_x$ e $f(y) = c$ para tal y . Finalmente, note que $B_x \subset A$ pois $B_x \cap A^c \subset B_x \cap B = \emptyset$. $\square$

Prova do lema 2.0.4. Seja P uma Ponte para F , $c \in \mathbb{R}$ o seu nível e A_1 e A_2 os conjuntos correspondentes a ela na definição 2.0.6. Como $A_1 \cup A_2 = f_{<c}$ temos que $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{f_{<c}}$. Logo, $P = f_{\leq c} - \overline{f_{<c}}$. O lema A.1.1 no apêndice mostra que P é justamente o conjunto de minimizadores locais de f no nível c .

Para completar a prova do lema 2.0.4 no caso em que F é normal usaremos indução finita para construir conjuntos abertos $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ e $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$ tais que

$$A_1 \subset X_1, \quad A_2 \subset Y_2, \quad \text{e} \quad \overline{X_k} \cap \overline{Y_k} = \emptyset, \quad (2.1)$$

$$X_{k+1} \supset \overline{X_k} \quad \text{e} \quad Y_{k+1} \supset \overline{Y_k} \quad (2.2)$$

e minimizadores locais

$$z_k \in Z_k = P \cap (\overline{X_k} - X_k). \quad (2.3)$$

Começamos então com X_1 e Y_1 . Pelo lema A.1.5 do apêndice, existem conjuntos abertos X_1 e Y_1 tais que $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset Y_1$ e $\overline{X_1} \cap \overline{Y_1} = \emptyset$. Ou seja, X_1 e Y_1 satisfazem (2.1) para $k = 1$. Agora procedemos por indução. Assumindo que já definimos X_j e Y_j satisfazendo (2.1) para $k = 1, \dots, j$ e (2.2) para $k = 1, \dots, j-1$ definimos X_{j+1} e Y_{j+1} satisfazendo (2.1) para $k = 1, \dots, (j+1)$ e (2.2)

$k = 1, \dots, j$. Para isto chamamos de X_{j+1} e Y_{j+1} os conjuntos obtidos ao aplicar o lema A.1.5 ao conjuntos X_j e Y_j . Isto completa a construção dos X_k 's e dos Y_k 's.

Provo agora por contradição que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um ponto $z_k \in Z_k$ que é um minimizador local não estrito de f . Suponhamos então que existe k para o qual todo ponto em Z_k é um minimizador local estrito. A definição 1.0.2 implica que existe um aberto A tal que $Z_k \subset A$ e $A \cap (P - Z_k) = \emptyset$. Sejam então $P_1 = P \cap \overline{X_k}$ e $P_2 = P - \overline{X_k} = P - P_1$. Note que o conjunto

$$B = X_k \cup f_{>c} \cup A$$

é aberto e $\overline{X_k} \subset B$, pois

$$\overline{X_k} = X_k \cup (\overline{X_k} - X_k) \subset X_k \cup f_{>c} \cup (f_{\leq c} \cap (\overline{X_k} - X_k)) = X_k \cup f_{>c} \cup Z_k \subset X_k \cup f_{>c} \cup A = B.$$

Além disso, $P_2 \cap X_k = (P - \overline{X_k}) \cap X_k \subset (P - X_k) \cap X_k = \emptyset$ e $P_2 \cap f_{>c} \subset P \cap f_{>c} = \emptyset$ e

$$P_2 \cap A = (P - \overline{X_k}) \cap A = (P - P \cap \overline{X_k}) \cap A \subset$$

$$\subset (P - P \cap (\overline{X_k} - X_k)) \cap A = (P - Z_k) \cap A = \emptyset.$$

Logo,

$$P_2 \cap B = (P_2 \cap X_k) \cup (P_2 \cap f_{>c}) \cup (P_2 \cap A) = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Como $\overline{X_k} \subset B$ e B é aberto, isto implica que

$$\overline{X_k} \cap \overline{P_2} = \emptyset. \tag{2.4}$$

Usando as equações (2.1) e (2.2) e $\overline{P_1} \subset \overline{X_k}$ obtemos que

$$(\overline{A_1} \cup \overline{P_1}) \cap (\overline{A_2} \cup \overline{P_2}) \subset \overline{X_k} \cap (\overline{Y_k} \cup \overline{P_2}) \subset \overline{X_k} \cap \overline{P_2}$$

Esta equação combinada com (2.4) leva a $(\overline{A_1} \cup \overline{P_1}) \cap (\overline{A_2} \cup \overline{P_2}) = \emptyset$, o que contradiz a definição de Ponte 2.0.6. Isto termina a nossa prova por contradição de que há de fato um minimizador local não estrito z_k em Z_k para todo k .

Finalmente, note que se $j > k$ então (2.2) e (2.3) mostram que $\overline{X_k} \subset X_j$ e

$$Z_j \cap Z_k = P \cap ((\overline{X_j} - X_j) \cap (\overline{X_k} - X_k)) \subset (\overline{X_j} - \overline{X_k}) \cap \overline{X_k} = \emptyset.$$

Logo, a sequência $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ é formada por pontos distintos e tem, de fato, infinitos elementos. $\square$

Capítulo 3

Unicidade do minimizador local em $\mathbb{R}^n$

Este capítulo apresenta princípios básicos para decidirmos se o programa não linear

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{sujeito a } & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3.1}$$

tem uma única solução local na região factível F . Assumimos que f é limitada inferiormente em F , isto é, existe μ tal que $f(x) \geq \mu$ para todo $x \in F$. Nosso propósito é motivar os capítulos mais abstratos que vem a seguir e apresentar resultados úteis para o leitor interessado apenas no problema (3.1) e que não tem interesse ou conhecimento para lidar com problemas mais gerais.

No $\mathbb{R}^n$ seguiremos a estratégia sugerida no último capítulo, ou seja combinaremos a Alternativa da Conectividade definida em 2.0.7 e o teorema 2.0.2. Os casos (iii) e (iv) na Alternativa da Conectividade 2.0.7 são patológicos, como mostram as definições 2.0.4, de Plateau, e 2.0.5, de Terraço, e o lema 2.0.4. Por exemplo, não há Plateaus, Terraços ou Pontes se os minimizadores locais de f forem estritos. Portanto, o difícil para usar o teorema 2.0.2 para provar que há um único minimizador local em problemas específicos é mostrar que não há Pontos de Conexão. Assim, critérios simples para decidir se um dado ponto é um Ponto de Conexão são essenciais para usar o teorema 2.0.2. Neste capítulo apresentamos critérios neste sentido em $\mathbb{R}^n$. Os critérios mais simples são estes:

Lema 3.0.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas. Se x é um Ponto de Conexão então $\nabla f(x) = 0$.* □

Lema 3.0.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas segundas contínuas. Se os autovalores de $\nabla^2 f(x)$ são positivos então x não é um Ponto de Conexão.* □

Lema 3.0.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas segundas contínuas. Se dois autovalores de $\nabla^2 f(x)$ são negativos então x não é um Ponto de Conexão.* □

O número de autovalores nulos ou positivos é irrelevante no lema 3.0.3. O teorema 2.0.2 e os lemas 3.0.1 e 3.0.3 são análogos aos critérios de segunda ordem para minimização. A condição “ $\nabla^2 f(x)$ com pelo menos dois autovalores negativos” que garante que x não é um Ponto de Conexão parece com a condição “ $\nabla^2 f(x)$ com pelo menos um autovalor negativo” que garante que x não é um minimizador local. Para estender esta analogia com minimização para problemas restritos consideramos o cone dual associado ao problema (3.1):

$$C_d(x) = \left\{ \sum_{i=1}^m \eta_i \nabla h_i(x) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \nabla g_j(x) \text{ para } \eta_i \in \mathbb{R} \text{ e } \gamma_j \geq 0 \text{ com } \gamma_j g_j(x) = 0 \right\}. \quad (3.2)$$

Podemos então enunciar uma condição de primeira ordem para excluir a existência de Pontos de Conexão para problemas restritos:

Teorema 3.0.1 *Suponha que as funções f , h_i e g_j nos problemas (3.1) tem derivadas contínuas e seja F sua região factível. Se o ponto $x_0 \in F$ satisfaz a condição de Mangasarian Fromovitz e é um Ponto de Conexão para f restrita a F então $\nabla f(x_0) \in C_d(x_0)$. $\square$*

Condições de segunda ordem para Pontos de Conexão sob a condição de Mangasarian Fromovitz são mais complicadas, assim como elas já são mais complicadas para minimização. Considere o seguinte exemplo bi dimensional:

Exemplo 3.0.1 *O programa não linear em duas variáveis dado por*

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= 4x - 2y^2, \\ \text{sujeito a } g_1(x, y) &= -x \leq 0, \\ g_2(x, y) &= -x + y^2 \leq 0 \end{aligned}$$

tem uma região factível convexa $F = \{(x, y) \text{ com } x \geq y^2\}$ e o ponto $p = (0, 0)$ satisfaz a condição de Slater (veja Bertsekas (2003)), que implica Mangasarian Fromovitz. Além disso, para $\gamma_1 = 3$ e $\gamma_2 = 1$,

$$\nabla f(p) = -\gamma_1 \nabla g_1(p) - \gamma_2 \nabla g_2(p) \quad (3.3)$$

e

$$d' (\nabla^2 f(p) + \gamma_1 \nabla^2 g_1(p) + \gamma_2 \nabla^2 g_2(p)) d = -2\|d\|^2$$

para todos d no subespaço ortogonal a $\nabla g_1(p)$ e $\nabla g_2(p)$. Entretanto, p é um minimizador global pois se $x \geq y^2$ então $f(x, y) \geq 4y^2 - 2y^2 \geq 0 = f(p)$. $\square$

Este exemplo mostra que é possível existir minimizadores com autovalores negativos na matriz Hessiana do Lagrangeano para algumas combinações (3.3) sob Mangasarian Fromovitz. Adicionando um dimensão obtemos um exemplo análogo para Pontos de Conexão:

Exemplo 3.0.2 *O programa não linear com três variáveis dado por*

$$\begin{aligned} \min f(x, y, z) &= 2z - x^2 - 2y^2, \\ \text{sujeito a } g_1(x, y, z) &= -z \leq 0, \\ g_2(x, y, z) &= -z + y^2 \leq 0 \end{aligned}$$

tem uma região factível convexa $F = \{(x, y, z) \text{ with } z \geq y^2\}$ e o ponto $p = (0, 0, 0)$ satisfaz a condição de Slater. Além disso, para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$,

$$\nabla f(p) = -\gamma_1 \nabla g_1(p) - \gamma_2 \nabla g_2(p)$$

e

$$d' (\nabla^2 f(p) + \gamma_1 \nabla^2 g_1(p) + \gamma_2 \nabla^2 g_2(p)) d = -2\|d\|^2$$

para todo d no sub espaço bi dimensional orthogonal a $\nabla g_1(p)$ and $\nabla g_2(p)$. Entretanto, p é um Ponto de Conexão pois se $f(x, y, z) < 0$ and $g_2(x, y, z) \leq 0$ então

$$-x^2 = f(x, y, z) + 2g_2(x, y, z) < 0 \Rightarrow x \neq 0$$

e o conjunto $\{(x, y, z) \text{ com } f(x, y, z) < 0 = f(p)\}$ tem duas componentes conexas, uma contendo os pontos com $x > 0$ e outra com os pontos com $x < 0$. $\square$

O próximo teorema mostra que o Ponto de Conexão x_0 com uma matriz Hessiana com dois autovalores negativos no cone tangente ocorre porque a derivada de $g = (g_1, g_2)$ no ponto x_0 é singular.

Teorema 3.0.2 *Suponha que as funções f_i e g_j no problema (3.1) tem derivadas de segunda ordem contínuas e seja F a sua região factível. Se $x_0 \in F$ é tal que os vetores*

$$D = \{\nabla h_i(x_0), i = 1, \dots, m\} \bigcup \{\nabla g_j(x_0), j = 1, \dots, p \text{ com } g_j(x) = 0\}$$

são linearmente independentes, $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \eta_i \nabla h_i(x_0) - \sum_{j=1}^p \gamma_j \nabla g_j(x_0)$, com $\gamma_j \geq 0$ e $\gamma_j \nabla g_j(x_0) = 0$, e existe um espaço bi dimensional $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$d'v = 0 \quad \text{e} \quad v' \left\{ \nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^m \eta_i \nabla^2 h_i(x_0) + \sum_{j=1}^p \gamma_j \nabla^2 g_j(x_0) \right\} v < 0$$

para todo $v \in V - \{0\}$ e $d \in D$ então x_0 não é um Ponto de Conexão para f restrita a F . $\square$

Os teoremas 3.0.1 e 3.0.2 fornecem critérios locais para provar a inexistência de Pontos de Conexão. Para usá-los precisamos de critérios topológicos globais para verificar que a Alternativa da Conectividade definida em 2.0.7 é válida. Um bom critério global foi introduzido por Palais e Smale em Palais e Smale (1964) para variedades modeladas em espaços de Hilbert. Estamos interessados no problema restrito (3.1), que sob Mangasarian Fromovitz pode ter uma região factível que não é uma variedade. No nosso caso o que importa é a distância do gradiente ao cone dual em (3.2). Por isso sugerimos a seguinte adaptação do conceito de norma da derivada:

Definição 3.0.1 *Seja F a região factível do problema (3.1) e C_d o cone dual em (3.2). Definimos a derivada restrita de f no ponto $x \in F$ como $\text{cdf}(x) = \text{dist}(\nabla f(x), C_d(x))$.* $\square$

Podemos então enunciar uma versão da Condição de Palais Smale para problemas restritos:

Definição 3.0.2 *Seja F a região factível do problema (3.1). Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que este problema satisfaz a Condição de Palais Smale no nível c se toda seqüência $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset F$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cdf}(x_n) = 0$ tem uma subseqüência convergente.* $\square$

A Condição de Palais Smale é satisfeita por funções com conjuntos de nível limitados. Ela leva a critérios globais para verificar a Alternativa da Conectividade:

Teorema 3.0.3 *Suponha que as funções f , h_i e g_j no problema (3.1) tem derivadas contínuas e f é limitada inferiormente na região factível F . Se F é conexa, o problema satisfaz a Condição de Palais-Smale para todo $c \in \mathbb{R}$ e a condição de Mangasarian-Fromovitz é satisfeita para todo $x \in F$ então f restrita a F satisfaz a Alternativa da Conectividade na definição 2.0.7.* $\square$

Combinando os teoremas 3.0.1, 3.0.2 e 3.0.3 quando sabemos que f não tem Pontes ou Terraços obtemos uma técnica razoável para provar que o problema (3.1) tem um único minimizador local: usamos os teoremas 3.0.1 e 3.0.2 para garantir a inexistência de Pontos de Conexão e concluimos que o item (i) da Alternativa da Conexão deve valer. A aplicabilidade desta técnica ao problema particular com o qual nos importamos depende dos detalhes do problema. As referencias [Mäkeläinen et al. \(1981\)](#) e [Orme e Ruud \(2002\)](#) exemplificam como isto pode ser feito em problemas importantes em economia e estatística. Porém, em problemas gerais podemos ser incapazes de mostrar até mesmo que F é conexo.

3.1 Provas do capítulo 3

Prova do teorema 3.0.1. A condição de Mangasarian-Fromovitz é equivalente à condição de Robinson (4.2) para o problema (3.1) e o teorema 3.0.1 é um caso particular do teorema 4.0.2. $\square$

Prova do teorema 3.0.2. Para simplificar a notação assumiremos que $g_j(x_0) = 0$ para todo j , isto é, ignoraremos as restrições inativas, que são irrelevantes em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 . Seja $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ dada por $q(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x), g_1(x), \dots, g_p(x))'$ e $dq(x_0)$ a sua matriz Jacobiana no ponto x_0 . Tome uma base $\{v_1, v_2\}$ de V . A hipótese de independência linear implica que, para $1 \leq i \leq j \leq 2$, existem $s_{ij} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$dq(x_0) s_{ij} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_i \nabla^2 h_1(x_0) v_j \\ \dots \\ v_i \nabla^2 h_m(x_0) v_j \\ v_i \nabla^2 g_1(x_0) v_j \\ \dots \\ v_i \nabla^2 g_p(x_0) v_j \end{pmatrix}$$

O teorema 3.0.2 segue do teorema 4.0.3 com $X = \mathbb{R}^n$, $G = \{(y, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \text{ com } y = 0 \text{ e } w \leq 0\}$, $Y = \mathbb{R}^{m+p}$, $C = \mathbb{R}^n$, $\mu = 0$, $\gamma : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\gamma(x) = \sum_{i=1}^m \eta_i x_i - \sum_{j=1}^p \gamma_j x_{m+j}$, $d_k = v_k$ e s_{ij} como acima. $\square$

Prova do teorema 3.0.3. A condição de Mangasarian Fromovitz é equivalente à condição de Robinson (4.2) para o problema (3.1) e o teorema 3.0.1 é um caso particular do teorema 4.0.4. $\square$

Prova dos lemas 3.0.1 e 3.0.3. A situação descrita nestes lemas pode ser modelada como o problema 3.1 com uma variável adicional x_{n+1} e a restrição $x_{n+1} = 0$. Os lemas seguem então do teorema 3.0.2. $\square$

Prova do lema 3.0.2. Um mínimo local x não é um Ponto de Conexão pois $x \notin \overline{f_{<f(x)}}$. $\square$

Capítulo 4

O Lema da Conexão em espaços de Banach

Neste capítulo generalizamos os critérios apresentados no capítulo anterior para provar que certos pontos não são Pontos de Conexão para problemas da forma

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{sujeito a } x \in C \text{ e } g(x) \in G \end{aligned} \tag{4.1}$$

no qual a função f está definida no espaço de Banach X e g é uma função de X para o espaço de Banach Y . Assumimos que C e G são fechados e convexos e que as funções f e g são estritamente diferenciáveis em $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$, no seguinte sentido:

Definição 4.0.1 *Sejam X e Y espaços de Banach, f uma função de X para Y e $D : X \rightarrow Y$ uma transformação linear contínua. A transformação D é a derivada estrita de f no ponto $x_0 \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in \mathbb{B}_\delta(x_0) \Rightarrow \|f(y) - f(x) - D(y - x)\| \leq \epsilon \|y - x\|.$$

Dizemos que f é estritamente diferenciável no ponto x_0 se existir uma derivada estrita para f no ponto x_0 . $\square$

Aqui $\mathbb{B}_\delta(x_0)$ denota a bola de centro x_0 e raio δ . Quando $x_0 = 0$ nós escrevemos simplesmente $\mathbb{B}_\delta$.

Este capítulo foi inspirado pelos seguintes trabalhos: [Ljusternik \(1934\)](#), [Bartle e Graves \(1952\)](#), [Hildebrandt e Graves \(1927\)](#), [Graves \(1950\)](#), [Michael \(1956a\)](#), [Michael \(1956b\)](#) e [Borwein \(1986\)](#). O trabalho pioneiro de Ljusternik e Graves foi traduzido para linguagem moderna e generalizado em [Dontchev \(1996\)](#), [Dontchev \(2004\)](#) e [Borwein e Dontchev \(2003\)](#) levou ao conceito de regularidade métrica, que foi relacionado à qualificação de restrições em [Borwein \(1986\)](#), [Ioffe \(1979\)](#) e [Cominetti \(1990\)](#). A teoria apresentada aqui com relação a Pontos de Conexão e unicidade é análoga à teoria para minimização desenvolvida nas referências acima. Nosso trabalho também se baseia na qualificação de restrições de Robinson (veja [Robinson \(1975\)](#)):

$$g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0)) \tag{4.2}$$

e a caracterização do Cone Tangente de Clarke dada por [Rockafellar \(1979\)](#)

Definição 4.0.2 *Seja X um espaço de Banach e $C \subset X$. Dado $x_0 \in C$ dizemos que d é tangente a C em x_0 se para todo $\epsilon > 0$ existirem δ e $\lambda > 0$ tais que se $\|x - x_0\| \leq \delta$ e $t \in [0, \lambda]$ então $\text{dist}(x + td, C) \leq \epsilon t$. Denotamos por $T_C(x_0)$ o conjunto de vetores tangentes a C em x_0 , e chamamos este conjunto de Cone Tangente de Clarke.* $\square$

Nossa teoria começa com este teorema primal:

Teorema 4.0.1 *Sejam X e Y espaços de Banach e sejam $C \subset X$ e $G \subset Y$ fechados e convexos. Suponha que as funções $g : X \rightarrow Y$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em X e tem derivadas estritas $df(x_0)$ e $dg(x_0)$ no ponto $x_0 \in F = C \cap g^{-1}(G)$ e $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$. Se x_0 é um Ponto de Conexão para f restrita à F e $d \in T_C(x_0) \cap dg(x_0)^{-1}(T_G(g(x_0)))$ então $df(x_0)d \geq 0$.* $\square$

O resultado dual correspondente ao teorema 4.0.1 é enunciado em termos dos conjuntos

$$A^+ = \{ x^* \in X^* \text{ tal que } x^*(a) \geq 0 \text{ para todo } a \in A \}$$

Podemos então usar o teorema 4.0.1 acima e o teorema 4.2 em Borwein (1986) e deduzir o seguinte teorema:

Teorema 4.0.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $C \subset X$ e $G \subset Y$ são fechados e convexos, $g : X \rightarrow Y$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em X e estritamente diferenciáveis no ponto $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$ e $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$. Se x_0 é um Ponto de Conexão para f restrita a $C \cap g^{-1}(G)$ então $df(x_0) \in T_C(x_0)^+ + dg(x_0)^* T_G(g(x_0))^+$.* $\square$

Os teoremas 4.0.1 e 4.0.2 fornecem critérios primais e duais de primeira ordem para mostrar que x_0 não é um Ponto de Conexão. Estes critérios são análogos aos critérios para minimização. O exemplo 3.0.2 mostra que critérios de segunda ordem para provar que x_0 não é um Ponto de Conexão certamente pedirão mais do problema. Como consequência, critérios gerais de segunda ordem nesta área serão necessariamente tão complexos quanto este:

Teorema 4.0.3 *Sejam X e Y espaços de Banach, $f \in C^2(X, \mathbb{R})$, $g \in C^2(X, Y)$ e $C \subset X$ e $G \subset Y$ fechados e convexos. Suponha que $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$ é tal que $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ e $df(x_0) = dg(x_0)^* \gamma + \mu$ para $\mu \in T_C(x_0)^+$ e $\gamma \in T_G(g(x_0))^+$. Se existirem $d_1, d_2, s_{11}, s_{12}, s_{22} \in X$ tais que d_1 e d_2 são linearmente independentes e, para $1 \leq i \leq j \leq 2$,*

$$d_i \in (C - x_0) \cap (x_0 - C), \quad (4.3)$$

$$s_{ij} \in T_C(x_0) \cap (-T_C(x_0)), \quad (4.4)$$

$$dg(x_0)d_i \in (G - g(x_0)) \cap (g(x_0) - G), \quad (4.5)$$

$$dg(x_0)s_{ij} + d^2g(x_0)(d_i, d_j)/2 \in T_G(g(x_0)) \cap (-T_G(g(x_0))) \quad (4.6)$$

e $d^2f(x_0)(d, d) < \gamma(d^2g(x_0)(d, d))$ para $d \in \text{Span}\{d_1, d_2\} - \{0\}$ então x_0 não é um Ponto de Conexão para f restrita à $C \cap g^{-1}(G)$. $\square$

Este teorema ilustra porque descartar candidatos a Ponto de Conexão é mais fácil que análise variacional clássica. Um especialista em Teoria de Morse em dimensão infinita leria este teorema como “Se x_0 tem Índice de Morse pelo menos dois então x_0 não é um Ponto de Conexão”. Ele estaria

correto. Porém, para prosseguir com sua teoria ele usualmente se restringiria a espaços de Hilbert e funções f com derivadas segunda de Fredholm (veja [Gromoll e Meyer \(1969\)](#) e [Struwe \(2000\)](#)).

Como no capítulo anterior, precisamos de critérios globais para usar os teoremas [4.0.1](#), [4.0.2](#) e [4.0.3](#) para provar que f tem um único minimizador local usando a Alternativa da Conectividade definida em [2.0.7](#). Propomos então os seguintes conceitos de derivada restrita e Condição de Palais Smale para o problema [\(4.1\)](#):

Definição 4.0.3 *Seja F a região factível do problema [\(4.1\)](#). A derivada restrita de f em $x \in F$ é*

$$\text{cdf}(x) = \sup_{d \in T_C(x) \cap (dg(x)^{-1}(T_G(g(x)))) \text{ com } \|d\|=1} -df(x)d.$$

□

Definição 4.0.4 *Seja F a região factível do problema [\(4.1\)](#). Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que este problema satisfaz a Condição Diferencial de Palais Smale no nível c se toda seqüência $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset F$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cdf}(x_n) = 0$ tem uma subsequência convergente.*

□

A definição [4.0.4](#) difere da definição [3.0.1](#) devido a detalhes técnicos sobre a projeção métrica em cones em espaço de Banach discutida em [Penot e Ratsimahalo \(1998\)](#). Entretanto, sua essência é a mesma e elas são equivalentes em espaços de Banach reflexivos:

Lema 4.0.1 *Se o espaço de Banach X é reflexivo e o problema [\(4.1\)](#) satisfaz a condição de Robinson [\(4.2\)](#) no ponto x_0 então*

$$\text{cdf}(x_0) = \text{dist}(df(x_0), T_C(x_0)^+ + dg(x_0)^* T_G(g(x_0))^+).$$

□

Finalmente, a Condição Diferencial de Palais Smale leva a critérios globais para verificar a Alternativa da Conectividade:

Teorema 4.0.4 *Suponha que os conjuntos C e G no problema [\(4.1\)](#) são fechados e convexos, que as funções f e g tem derivadas de Fréchet contínuas e f é limitada inferiormente na região factível F . Se F é conexo e o problema satisfaz a Condição de Palais Smale para todo $c \in \mathbb{R}$ e a condição de Robinson, definida em [4.2](#), para todo $x \in F$ então f restrita a F satisfaz a Alternativa da Conectividade na definição [2.0.7](#).*

□

4.1 Provas do capítulo 4

A principal ferramenta nesta seção é uma versão do Teorema da Função Implícita de Ljusternik, introduzido em [Ljusternik \(1934\)](#). No problema [\(4.1\)](#), se $x_0 \in F = C \cap g^{-1}(G)$, $y_0 = g(x_0) \in G$, $d \in T_C(x_0)$ e $dg(x_0)d \in T_G(y_0)$ então um argumento de função implícita mostra que se x está próximo de x_0 então existe um caminho contínuo $\eta(x, t) \subset F$ que é aproximadamente tangente a d para cada t . Se $df(x_0)d$ é negativa então, para $c = f(x_0)$, estes caminhos podem ser usados para ligar todos os pontos em $F \cap f_{<c}$ próximos a x_0 a um único ponto $x \in F \cap f_{<c}$. Como consequência, x_0 não é um Ponto de Conexão pelo seguinte lema:

Lema 4.1.1 *Seja F um espaço topológico, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $x_0 \in F$ com $f(x_0) = c$. Se há uma vizinhança V de x_0 , um conjunto conexo $C \subset f_{<c}$ e, para todo $x \in V \cap f_{<c}$, um conjunto conexo $C_x \subset f_{<c}$ tal que $x \in C_x$ e $C_x \cap C \neq \emptyset$ então x_0 não é um Ponto de Conexão. $\square$*

A teoria de segunda ordem sob as hipóteses do teorema 4.0.3 é similar. Um argumento do tipo função implícita mostra que há um sub espaço bi dimensional D no espaço tangente T a $F = C \cap g^{-1}(G)$ no qual $d^2f(x_0)(\cdot, \cdot) - \gamma(d^2g(x_0)(\cdot, \cdot))$ é negativa e se $d^2g(x_0)(D, D) \subset dg(x_0)T$ então existe um círculo (deformado) $\mathcal{C} \subset F$ próximo a D tal que $f(x) < c = f(x_0)$ e $\mathcal{C}$ e podemos ligar todo x próximo a x_0 em $F \cap f_{<c}$ com $\mathcal{C}$ por um caminho contido em $F \cap f_{<c}$ e o lema 4.1.1 implica que x_0 não é um Ponto de Conexão.

No resto desta seção formalizamos esta introdução intuitiva. A essência do nosso argumento é conhecida desde o trabalho de Ljusternik nos 1930's, mas nossa apresentação usa o Teorema da Seleção de Michael (Michael (1956b)), que foi desenvolvido nos anos 1950's. Michael usou seu teorema para estender os resultados de Bartle e Graves e mais recentemente Páles (1997) e Borwein e Dontchev (2003) usaram argumentos similares aos apresentados aqui. Nós adicionamos alguns detalhes a estes trabalhos para provar os teoremas do capítulo 4. Para iniciar, emprestamos as seguintes definição e lema de Borwein (1986):

Definição 4.1.1 *Sejam X e Y espaços de Banach spaces e V um espaço métrico. Dizemos que $g : X \times V \rightarrow Y$ é parcialmente estritamente diferenciável em x no ponto $(x_0, v_0) \in X \times V$ se as derivadas parciais de Fréchet $d_x g(x_0, v_0)$ existem e para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $v, x, y \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ então $\|g(y, v) - g(x, v) - d_x g(x_0, v_0)(y - x)\| \leq \epsilon \|y - x\|$. $\square$*

Lema 4.1.2 *Sejam X e Y espaços de Banach, sejam $C \subset X$ e $G \subset Y$ fechados e convexos e seja V um espaço métrico. Suponha que $g : X \times V \rightarrow Y$ é contínua em $X \times Y$ e parcialmente estritamente diferenciável em x no ponto $(x_0, v_0) \in (C \times V) \cap g^{-1}(G)$. Se $g(x_0, v_0) \in \text{core}(G - d_x g(x_0, v_0)(C - x_0))$ então existe $\rho, \delta > 0$ tais que se $x \in C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ e $v \in \mathbb{B}_\delta(v_0)$ então*

$$\text{dist}(x, R(v)) \leq \rho \text{dist}(g(x, v), G), \quad (4.7)$$

onde

$$R(v) = \{c \in C \text{ com } g(c, v) \in G\}. \quad (4.8)$$

$\square$

O resultado de Borwein, o Teorema da Seleção de Michael e o próximo lema levam a nossa versão do teorema da função implícita 4.1.1 enunciada a seguir. Após apresentarmos estes lema e teorema provaremos os teoremas e os lemas do capítulo 4.

Lema 4.1.3 *Sejam X e Y espaços de Banach, V um espaço métrico e $U, C \subset X$ e $G \subset Y$, com U aberto. Sejam $r : V \rightarrow \mathbb{R}$, $c : V \rightarrow X$ e $\varphi : X \times V \rightarrow Y$ funções contínuas. Defina*

$$R(v) = \{c \in C \text{ com } \varphi(c, v) \in G\} \quad (4.9)$$

e suponha que existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $c \in U \cap C$ e $v \in V$,

$$\text{dist}(c, R(v)) \leq \rho \text{dist}(\varphi(c, v), G). \quad (4.10)$$

Considere a função multi-valuada $A : V \rightrightarrows X$ dada por

$$A(v) = \{c(v)\} \text{ se } r(v) \leq 0 \quad \text{e} \quad A(v) = U \cap R(v) \cap \text{int}(\mathbb{B}_{r(v)}(c(v))) \text{ se } r(v) > 0. \quad (4.11)$$

Se os conjuntos $A(v)$ são não vazios então $B : V \rightrightarrows X$ definida por $B(v) = \overline{A(v)}$ é semi contínua inferiormente. $\square$

Teorema 4.1.1 *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $C \subset X$ e $G \subset Y$ são fechados e convexos e $g : X \rightarrow Y$ é contínua em X e estritamente diferenciável no ponto $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$. Se $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ então existem δ e ρ positivos tais que para todo espaço métrico M e funções contínuas $h : M \rightarrow C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ existe uma função contínua $\tilde{h} : M \rightarrow C$ tal que $g(\tilde{h}(m)) \in G$ para $m \in M$ e*

$$\|\tilde{h}(m) - h(m)\| \leq \rho \text{dist}(g(h(m)), G). \quad (4.12)$$

$\square$

Corolário 4.1.1 *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha $C \subset X$ e $G \subset Y$ são fechados e conexos e $g : X \rightarrow Y$ é contínua em X e estritamente diferenciável no ponto $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$. Se $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ então existem δ e ρ positivos tais que para todo espaço métrico M e funções contínuas $h_x : M \rightarrow C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ e $h_y : M \rightarrow G \cap \mathbb{B}_\delta(g(x_0))$ existem funções contínuas $\tilde{h}_x : M \rightarrow C$ e $\tilde{h}_y : M \rightarrow G$ tais que, para todo $m \in M$,*

$$g(\tilde{h}_x(m)) = \tilde{h}_y(m), \quad (4.13)$$

$$\|\tilde{h}_x(m) - h_x(m)\| + \|\tilde{h}_y(m) - h_y(m)\| \leq \rho \|g(h_x(m)) - h_y(m)\|. \quad (4.14)$$

$\square$

Corolário 4.1.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $C \subset X$ e $G \subset Y$ são fechados e convexos e $g : X \rightarrow Y$ é contínua em X e estritamente diferenciável no ponto $x_0 \in F = C \cap g^{-1}(G)$. Se $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in F \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ existe uma função contínua $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$ com*

$$\|\varphi(t) - tx_2 - (1-t)x_1\| + \|g(\varphi(t)) - tg(x_2) - (1-t)g(x_1)\| \leq \epsilon t(1-t) \|x_2 - x_1\| \quad (4.15)$$

e $g(\varphi(t)) \in G$ para $t \in [0, 1]$. $\square$

Prova do Teorema 4.0.1. O teorema 4.0.1 segue da definição 5.0.2, do lema 5.0.7 e dos próximos lemas e teoremas, que serão provados a seguir.

Lema 4.1.4 *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $C \subset X$ e $G \subset Y$ são fechados e convexos. Se a função $g : X \rightarrow Y$ é contínua e estritamente diferenciável no ponto $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$ e $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ então existe $\delta_0 > 0$ tal que se $\delta \in (0, \delta_0)$ então $C \cap g^{-1}(G) \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ é conexo por caminhos.* $\square$

Teorema 4.1.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $C \subset X$ e $G \subset Y$ são fechados e convexos e $g : X \rightarrow Y$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em X e tem derivadas estritas $df(x_0)$ e $dg(x_0)$*

em $x_0 \in F = C \cap g^{-1}(G)$. Se $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ e existe $d \in T_C(x_0)$ tal que $\|d\| = 1$ e $dg(x_0)d \in T_G(g(x_0))$ então a weak slope de f restrita a F em x_0 é pelo menos $-df(x_0)d$. $\square$

Prova do teorema 4.0.2. Se tomarmos $K = T_C(x_0)$ e $S = T_G(g(x_0))$ então o teorema 4.0.1 implica que

$$df(x_0) \in \left(K \cap dg(x_0)^{-1}(S) \right)^+.$$

A quarta linha na prova do corolário 6.2 na página 35 de [Borwein \(1986\)](#) e a equação (67) no enunciado do teorema 6.3 na página 34 de [Borwein \(1986\)](#) mostram que $df(x_0) \in K^+ + dg(x_0)^* S^+$. $\square$

Prova do teorema 4.0.3. Escrevamos $F = C \cap g^{-1}(G)$, $y_0 = g(x_0)$, $c = f(x_0)$, $S = \text{Span}(s_{11}, s_{12}, s_{22})$ e $D = \text{Span}(d_1, d_2)$. A equação (4.4) implica que $S \subset T_C(x_0) \cap (-T_C(x_0))$ e a equação (4.6) mostra que existe uma função quadrática simétrica $Q : D \times D \rightarrow S$ com $Q(d_i, d_j) = s_{ij}$ para $1 \leq i \leq j \leq 2$ e

$$dg(x_0)Q(d, d) + d^2g(x_0)(d, d)/2 \in T_G(y_0) \cap (-T_G(y_0)).$$

Se K é convexo e $x \in K$ então $K - x \subset T_K(x)$. Assim, as equações (4.3) – (4.6) implicam que $D \subset T_C(x_0) \cap (-T_C(x_0))$ e $dg(x_0)D \subset T_G(y_0) \cap (-T_G(y_0))$. A positividade de μ em $T_C(x_0)$ e positividade de γ em $T_G(y_0)$ mostram que

$$\mu(d) = \mu(Q(d, d)) = \gamma(dg(x_0)d) = \gamma(dg(x_0)Q(d, d) + d^2g(x_0)(d, d)/2) = 0. \quad (4.16)$$

Por hipótese, $d^2f(x_0)(d, d) < \gamma(d^2g(x_0)(d, d))$ para $d \in D - \{0\}$ e existe $\kappa \in (0, 1)$ tal que

$$d^2f(x_0)(d, d) - \gamma(d^2g(x_0)(d, d)) \leq -8\kappa\|d\|^2. \quad (4.17)$$

Agora usamos as equações acima e os corolários 4.1.1 e 4.1.2 para definir $\epsilon, \sigma \in (0, 1)$, uma função contínua $\psi : D \cap \mathbb{B}_\sigma \rightarrow X$, e para cada $x \in \mathbb{B}_\sigma(x_0)$, funções contínuas $\varphi_x : [0, 1] \rightarrow X$ e $\omega_x : [0, 1] \rightarrow X$ tais que para $d \in D \cap \mathbb{B}_\sigma - \{0\}$, $t \in [0, 1]$ e $x \in F \cap f_{<c} \cap \mathbb{B}_{\epsilon\sigma^2}(x_0)$,

$$\psi(d) \in F \cap f_{<c}, \quad \varphi(x, t) \in F \cap f_{<c}, \quad \omega_x(t) \in F \cap f_{<c}, \quad (4.18)$$

$$\varphi_x(0) = x, \quad \omega_x(0) = \varphi_x(1), \quad \omega_x(1) = \psi(d_x), \quad (4.19)$$

onde $d_x \in D$ tem norma σ . O conjunto $H = \psi(D \cap \mathbb{B}_\sigma - \{0\})$ é conexo e $H \subset F \cap f_{<c}$. Além disso, se $x \in F \cap f_{<c} \cap \mathbb{B}_{\epsilon\sigma^2}(x_0)$ então o caminho $\{\varphi_x(t), t \in [0, 1]\} \cup \{\omega_x(t), t \in [0, 1]\}$ conecta x a H via $F \cap f_{<c}$. Portanto, se encontrarmos funções ψ , φ_x e ω_x como acima então o teorema 4.0.3 seguirá do lema 4.1.1.

Agora explicamos como construir ψ , φ_x e ω_x . Segundo os corolários 4.1.1 e 4.1.2 existem $\delta, \rho > 0$ tais que para todo espaço métrico M e funções contínuas $h_x : M \rightarrow C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ e $h_y : M \rightarrow G \cap \mathbb{B}_\delta(y_0)$ existem funções contínuas $\tilde{h}_x : M \rightarrow C$ e $\tilde{h}_y : M \rightarrow G$ tais que (4.13) e (4.14) são satisfeitas para todo $m \in M$ e se $x, y \in C \cap g^{-1}(G) \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ então existe um caminho contínuo $\pi_{x,y} : [0, 1] \rightarrow C \cap g^{-1}(G)$ tal que

$$\|\pi_{x,y}(t) - ty - (1-t)x\| \leq t(1-t)\|x - y\|. \quad (4.20)$$

Definamos

$$\xi_f(x, w) = f(x + w) - f(x) - df(x)w - d^2f(x_0)(w, w)/2, \quad (4.21)$$

$$\xi_g(x, w) = g(x + w) - g(x) - dg(x)w - d^2g(x_0)(w, w)/2. \quad (4.22)$$

A continuidade das derivadas segundas de f e g e o fato de Q ser quadrática no espaço de dimensão finita D implicam que existe $\lambda > 1$ e $\nu \in (0, \delta)$ tais que se $x, y \in \mathbb{B}_\nu(x_0)$ e $d, e \in D$ então

$$\|df(x)\| + \|dg(x)\| \leq \lambda, \quad (4.23)$$

$$\|Q(d, d) - Q(e, e)\| \leq \lambda\|d - e\|(\|d\| + \|e\|), \quad (4.24)$$

$$\|df(x) - df(y)\| + \|dg(x) - dg(y)\| \leq \lambda\|y - x\|. \quad (4.25)$$

Usando a constante κ em (4.17), definamos

$$\epsilon = \frac{\min\{1, \kappa\}}{90(1 + \rho)\lambda^2}. \quad (4.26)$$

A hipótese sobre d_i e s_{ij} e o lema 4.1.5 (enunciado no fim desta seção) aplicados aos sub espaços

$$S_x = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} Q(d_i, d_j), \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \subset X,$$

$$S_y = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} (dg(x_0) Q(d_i, d_j) + d^2g(x_0)(d_i, d_j)/2), \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \subset Y$$

implicam que há σ positivo tal que

$$\sigma \leq \min \left\{ \nu, \frac{\epsilon}{6(\lambda + \epsilon)^2} \right\}$$

e se $x \in \mathbb{B}_\sigma(x_0)$, $w \in \mathbb{B}_\sigma$ e $d \in D \cap \mathbb{B}_\sigma$ então as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\text{dist}((x + d) + Q(d, d), C) \leq \epsilon\|d\|^2, \quad (4.27)$$

$$\text{dist}((g(x) + dg(x_0)d) + (dg(x_0)Q(d, d) + d^2g(x_0)(d, d)/2), G) \leq \epsilon\|d\|^2, \quad (4.28)$$

$$\|\xi_f(x, w)\| + \|\xi_g(x, w)\| \leq \epsilon\|w\|^2. \quad (4.29)$$

Seja M o espaço métrico $(C \cap \mathbb{B}_\sigma(x_0)) \times (D \cap \mathbb{B}_\sigma)$. Usando (4.27), o lema 4.1.3 com $X = X$, $Y = X$, $V = M$, $U = X$, $C = C$, $G = C$, $r(x, d) = 2\epsilon\|d\|^2$, $c(x, d) = x + d + Q(d, d)$ e $\varphi(c, x, d) = c$ e o Teorema da Seleção de Michael com a função multi valuada $T : M \rightrightarrows X$ dada por $T(x, d) = \mathbb{B}_{2\epsilon\|d\|^2}(x + d + Q(d, d)) \cap C$ obtemos uma função contínua $\chi : M \rightarrow X$ tal que

$$\|\chi(x, d)\| \leq 2\epsilon\|d\|^2, \quad (4.30)$$

$$h_x(x, d) = x + d + Q(d, d) + \chi(x, d) \in C. \quad (4.31)$$

Analogamente, existe uma função contínua $v : M \rightarrow Y$ tal que

$$\|v(x, d)\| \leq 2\epsilon\|d\|^2, \quad (4.32)$$

$$h_y(x, d) = g(x) + dg(x_0)d + d^2g(x_0)(d, d)/2 + dg(x_0)Q(d, d) + v(x, d) \in G. \quad (4.33)$$

Para avaliar a desigualdade (4.14), note que $w = Q(d, d) + \chi(x, d)$ satisfaz

$$\|w\| \leq \|Q(d, d)\| + \|\chi(x, d)\| \leq (\lambda + \epsilon)\|d\|^2, \quad (4.34)$$

$$\|x + d - x_0\| \leq \sigma + \|d\| \leq 2\sigma \text{ e}$$

$$\begin{aligned} g(h_x(x, d)) - h_y(x, d) &= g(x + d) + dg(x + d)w + d^2g(x_0)(w, w)/2 + \xi_g(x + d, w) - h_y(x, d) \\ &= \xi_g(x, d) + (dg(x + d) - dg(x_0))Q(d, d) + dg(x + d)\chi(x, d) + \\ &\quad + \xi_g(x + d, w) - v(x, d) + d^2g(x_0)(w, w)/2. \end{aligned}$$

Usando as equações (4.25)–(4.30), (4.32) e lembrando que $\lambda > 1$ e $\|d\| \leq \sigma \leq \epsilon/6(\lambda + \epsilon)^2$, obtemos

$$\|g(h_x(x, d)) - h_y(x, d)\| \leq \left(\epsilon + 2\sigma\lambda^2 + 2\lambda\epsilon + \epsilon(\lambda + \epsilon)^2\|d\|^2 + 2\epsilon + \lambda(\lambda + \epsilon)^2\|d\|^2 \right) \|d\|^2$$

e

$$\|g(h_x(x, d)) - h_y(x, d)\| \leq 7\lambda\epsilon\|d\|^2. \quad (4.35)$$

As equações (4.14) e (4.35) e o modo como δ foi definido mostram que existem funções contínuas $\tilde{h}_x : M \rightarrow C$ e $\tilde{h}_y : M \rightarrow G$ tais que $\tilde{h}_y(x, d) = g(\tilde{h}_x(x, d))$ e

$$\|\tilde{h}_x(x, d) - h_x(x, d)\| + \|\tilde{h}_y(x, d) - h_y(x, d)\| \leq 7\lambda\rho\epsilon\|d\|^2. \quad (4.36)$$

Como consequência da última linha, se definirmos

$$\tilde{\chi}(x, d) = \tilde{h}_x(x, d) - x - d - Q(d, d), \quad (4.37)$$

$$\tilde{v}(x, d) = \tilde{h}_y(x, d) - g(x) - dg(x_0)d - d^2g(x_0)(d, d)/2 - dg(x_0)Q(d, d) \quad (4.38)$$

então usando (4.30) – (4.38) obtemos

$$\|\tilde{\chi}(x, d)\| \leq 8\lambda\rho\epsilon\|d\|^2 \quad \text{e} \quad \|\tilde{v}(x, d)\| \leq 8\lambda\rho\epsilon\|d\|^2, \quad (4.39)$$

$$\tilde{h}_x(x, d) = x + d + Q(d, d) + \tilde{\chi}(x, d), \quad (4.40)$$

$$\tilde{h}_y(x, d) = g(x) + dg(x_0)d + d^2g(x_0)(d, d) + dg(x_0)Q(d, d)/2 + \tilde{v}(y, d). \quad (4.41)$$

Afirmamos que se $\|x - x_0\| \leq \sigma$ e $\|d\| \leq \sigma$,

$$(dg(x) - dg(x_0))d = 0 \quad (4.42)$$

e κ é a constante em (4.17) então

$$f(\tilde{h}_x(x, d)) \leq f(x) - 2\kappa\|d\|^2. \quad (4.43)$$

De fato, a equação (4.40) mostra que, para w como em (4.34),

$$f\left(\tilde{h}_x(x, d)\right) = f(x) + df(x)(d + Q(d, d) + \tilde{\chi}(x, d)) + d^2f(x_0)(w + d, w + d)/2 + \xi_f(x, w + d).$$

Segue de (4.42) que

$$f\left(\tilde{h}_x(x, d)\right) = f(x) + df(x_0)(d + Q(d, d)) + d^2f(x_0)(d, d)/2 + \xi(x, w + d) \quad (4.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi(x, w) &= df(x)\tilde{\chi}(x, d) + (df(x) - df(x_0))Q(d, d) + \\ &\quad + (d^2f(x_0)(w + d, w + d) - d^2f(x_0)(d, d))/2 + \xi_f(x, w + d). \end{aligned}$$

As desigualdades (4.23) – (4.29), (4.34) e (4.39) levam a $\|w + d\| \leq \|w\| + \|d\| \leq 2\|d\|$ e

$$\|\xi(x, w)\| \leq (8\lambda^2\rho\epsilon + \lambda^2\sigma + 3\lambda^2(\lambda + \epsilon)\|d\| + 4\epsilon)\|d\|^2 \leq 2\kappa\|d\|^2. \quad (4.45)$$

Além disso, a equação (4.16) implica que

$$\begin{aligned} df(x_0)(d + Q(d, d)) &= \mu(d + Q(d, d)) + \gamma(dg(x_0)(d + Q(d, d))) \\ &= \gamma(dg(x_0)Q(d, d)) = -\gamma(d^2g(x_0)(d, d))/2. \end{aligned}$$

A equação (4.43) segue de (4.17) e (4.44) – (4.45) e da última equação.

Como (4.42) é satisfeita para todo d quando $x = x_0$, a equação (4.43) mostra que $\psi(d) = \tilde{h}_x(x_0, d)$ é tal que $f(\psi(d)) \leq f(x_0) - 2\kappa\|d\|^2 < c$ para $d \in D \cap \mathbb{B}_\sigma$. Portanto, ψ é como prometido em (4.18). Como D tem dimensão dois, para todo $x \in \mathbb{B}_\sigma(x_0)$ existe $d = d_x$ com $\|d_x\| = \sigma$ satisfazendo (4.42). Segue de (4.43) que $\varphi_x(t) = \tilde{h}_x(x, td_x)$ é tal que $f(\varphi_x(t)) < c$ se $f(x) < c$. Além disso, as equações (4.39) e (4.40) mostram que $\varphi_x(0) = \tilde{h}_x(x, 0) = x$. Portanto, φ_x também é como prometido em (4.18) – (4.19).

Finalmente, definimos $\omega_x(t) = \pi_{\varphi_x(1), \psi(d_x)}(t)$, onde $\pi_{x,y}$ é o caminho em (4.20). Pelo modo como $\pi_{x,y}$ foi definida $\omega_x(t)$ satisfaz (4.19) e $\omega_x(t) \in F$ para $t \in [0, 1]$. Para completar esta prova mostramos agora que se $f(x) < c$ e $\|x - x_0\| \leq \epsilon\sigma^2$ então $f(\omega_x(t)) < c$ para $t \in [0, 1]$. De fato, as desigualdades (4.25) e (4.43) levam a

$$\begin{aligned} f(\omega_x(t)) &\leq f(\psi(d_x)) + \lambda\|\omega_x(t) - \psi(d_x)\| \\ &\leq f(x) - 2\kappa\sigma^2 + \lambda\|\omega_x(t) - t\psi(d_x) - (1-t)\varphi_x(1)\| + \lambda(1-t)\|\varphi_x(1) - \psi(d_x)\| \end{aligned}$$

e (4.20) implica que

$$f(\omega_x(t)) \leq c - 2\kappa\sigma^2 + \lambda(1-t^2)\|\varphi_x(1) - \psi(d_x)\| = c - 2\kappa\sigma^2 + \lambda\|\tilde{h}_x(x, d_x) - \tilde{h}_x(x_0, d_x)\|. \quad (4.46)$$

As equações (4.39) e (4.40) e o fato que $\|x - x_0\| \leq \epsilon\sigma^2$ e $\|d_x\| = \sigma$ mostram que

$$\|\tilde{h}_x(x, d_x) - \tilde{h}_x(x_0, d_x)\| \leq \|x - x_0\| + \|\tilde{\chi}(x, d_x)\| + \|\tilde{\chi}(x_0, d_x)\| \leq 15\lambda(1 + \rho)\epsilon\sigma^2.$$

Esta equação, (4.26) e (4.46) mostram que $f(\omega_x(t)) \leq c - \kappa\sigma^2$ e ω_x é como dito em (4.18). $\square$

Prova do teorema 4.0.4. Seja f_F a restrição de f à região factível F . O lema 5.0.6 e a hipótese que f_F satisfaz a Condição Diferencial de Palais Smale definida em 4.0.4 implicam que f_F satisfaz a condição Métrica de Palais Smale definida em 5.0.3 para todo $c \in \mathbb{R}$. Como consequência, os lemas 6.0.3 e 7.1.5 mostram que f_F satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale e os conjuntos $f_c^{\min}$ na definição 6.0.7 são relativamente compactos para todo c . Se $f_{<a}$ é conexo para todo a então o teorema 7.0.2 mostra que f_F satisfaz o item (i) ou (iv) na Alternativa da Conexão. Por outro lado, se $f_{<a}$ é desconexo para algum a então o lema 6.0.2 e o lema 6.0.1 com $c = +\infty$ mostra que f_F satisfaz o item (ii) ou o item (iii) da Alternativa da Conectividade. Em ambos os casos f_F satisfaz a Alternativa da Conectividade. $\square$

Prova do teorema 4.1.1. A função $\theta : X \times X \rightarrow Y$ dada por $\theta(x, v) = g(v) + dg(x_0)(x - v)$ é contínua em $X \times X$ e parcialmente estritamente diferenciável em x no ponto (x_0, x_0) , com derivada parcial em x dada por $d_x\theta(x_0, x_0) = dg(x_0)$. Portanto,

$$\theta(x_0, x_0) = g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0)) = \text{core}(G - d_x\theta(x_0, x_0)(C - x_0))$$

e o lema 4.1.2 aplicado a $g = \theta$ e $V = X$ fornece $\mu, \sigma > 0$ tais que

$$\text{dist}(x, R(v)) \leq \mu \text{dist}(g(v) + dg(x_0)(x - v), G) \quad (4.47)$$

para

$$R(v) = \{ c \in C \text{ with } g(v) + dg(x_0)(c - v) \in G \} \quad (4.48)$$

e $x \in C \cap \mathbb{B}_\sigma(x_0)$ e $v \in \mathbb{B}_\sigma(x_0)$. Como g é estritamente diferenciável no ponto x_0 existe $\tau \in (0, \sigma/4)$ tal que se $\|x - x_0\| \leq 4(1 + \mu)\tau$ e $\|w - x_0\| \leq 4(1 + \mu)\tau$ então

$$\|g(w) - g(x) - dg(x_0)(w - x)\| \leq \frac{1}{2(1 + \mu)} \|w - x\|. \quad (4.49)$$

A continuidade de g fornece $\delta \in (0, \tau)$ tal que se $\|x - x_0\| \leq 4(1 + \mu)\delta$ então

$$\chi(x) = \text{dist}(g(x), G) \leq \frac{\tau}{2(1 + \mu)}. \quad (4.50)$$

Dado um espaço métrico M e uma função contínua $h : M \rightarrow C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ definimos $h_0 = h$ como o primeiro elemento de uma sequência de Cauchy $\{h_k, k \in \mathbb{N}\}$ no espaço métrico completo $C_b(M, C)$ que converge para uma função $\tilde{h}$ como prescrito na tese do teorema 4.1.1. A equação abaixo é óbvia para $k = 0$ e $m \in M$:

$$\text{dist}(g(h_k(m)), G) \leq 2^{-k} \chi(h(m)), \quad (4.51)$$

$$\|h_k(m) - h(m)\| \leq 2 \left(1 - 2^{-k}\right) (1 + \mu) \chi(h(m)). \quad (4.52)$$

Definimos então h_{k+1} assumindo que (4.51) – (4.52) são satisfeitas. Note que o uso de (4.48) – (4.49) com x substituído por $h_k(m)$ é justificado porque (4.50) e (4.52) implica que

$$\|h_k(m) - x_0\| \leq \|h_k(m) - h(m)\| + \|h(m) - x_0\| \leq 2(1 + \mu) \times \frac{\tau}{2(1 + \mu)} + \delta = \tau + \delta < 4\tau < \sigma. \quad (4.53)$$

Os conjuntos $U = \text{int}(\mathbb{B}_\sigma(x_0))$ e $V = M$ e as funções

$$c(m) = h_k(m), \quad (4.54)$$

$$r(m) = 2^{-k} (1 + \mu) \chi(h(m)), \quad (4.55)$$

$$\varphi(x, m) = g(h_k(m)) + dg(x_0) (x - h_k(m)). \quad (4.56)$$

satisfazem as hipóteses do lema 4.1.3, pois (4.47) implica (4.10) e afirmamos que os conjuntos A in (4.11) correspondentes a c , r e φ acima são não vazios. De fato, se $R(m)$ é o conjunto correspondente a c , r e φ em (4.9) e se $r(m) > 0$ então (4.51) mostra que

$$\begin{aligned} \text{dist}(c(m), R(m)) &= \text{dist}(h_k(m), R(m)) \leq \mu \text{dist}(\varphi(h_k(m)), G) \leq \\ &\leq \mu 2^{-k} \chi(h(m)) < 2^{-k} (1 + \mu) \chi(h(m)) = r(m). \end{aligned}$$

e existe $x \in R(m)$ com $\|x - c(m)\| < r(m)$. Este x pertence ao conjunto $A(m)$ em (4.11). Os conjuntos $B(m) = \overline{A(m)}$ são fechados e convexos e concluímos do lema 4.1.3 e do Teorema da Seleção de Michael que existe uma função contínua $h_{k+1} : M \rightarrow C$ tal que

$$\begin{aligned} \|h_{k+1}(m) - c(m)\| &= \|h_{k+1}(m) - h_k(m)\| \leq r(m) = 2^{-k} (1 + \mu) \chi(h(m)), \\ \eta_k(m) &= g(h_k(m)) + dg(x_0) (h_{k+1}(m) - h_k(m)) \in G. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Somando (4.57) a (4.52) concluímos que (4.52) vale para $k+1$ e (4.53) nos permite usar (4.49) para concluir que $g(h_{k+1}(m)) = \eta_k(m) + \xi_k(m)$ com

$$\|\xi_k(m)\| \leq \frac{1}{2(1+\mu)} \|h_{k+1}(m) - h_k(m)\| \leq 2^{-(k+1)} \chi(h(m)).$$

Combinado as últimas duas equações com o fato que $\eta_k(m) \in G$ obtemos (4.51) para $k+1$. A desigualdade (4.57) mostra que h_k é uma seqüência de Cauchy. Isto completa a construção indutiva de h_k , que converge para $\tilde{h}$ tal que $\tilde{h}(m) \in G$ por (4.51) e, segundo (4.52),

$$\|\tilde{h}(m) - h(m)\| \leq 2(1+\mu) \chi(h(m)) = 2(1+\mu) \text{dist}(g(h(m)), G).$$

A desigualdade (4.12) segue desta equação com $\rho = 2(1+\mu)$. □

Prova do corolário 4.1.1. Definamos $y_0 = g(x_0)$. A função $\gamma : X \times Y \rightarrow Y$ dada por $\gamma(x, y) = g(x) - y$ é contínua e estritamente parcialmente diferenciável no ponto (x_0, y_0) e satisfaz $d_x \gamma(x_0, y_0) = dg(x_0)$ e $d_y \gamma(x_0, y_0) = -I$. Portanto, a hipótese $y_0 \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ implica que

$$0 \in \text{core}(\{0\} - d_y \gamma(x_0, y_0)(G - y_0) - d_x \gamma(x_0, y_0)(C - x_0))$$

O teorema 4.1.1 para $X = X \times Y$ com a norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, $Y = Y$, $C = C \times G$, $G = \{0\}$, $g = \gamma$, leva a $\delta', \rho > 0$ tais que para todo espaço métrico M e funções contínuas $h : M \rightarrow (C \times G) \cap \mathbb{B}_{\delta'}((x_0, y_0))$ existe uma função contínua $\tilde{h} : M \rightarrow C \times G$ tal que

$$g(\tilde{h}_x(m)) - \tilde{h}_y(m) \in \{0\}, \quad (4.58)$$

$$\|\tilde{h}_x(m) - h_x(m)\| + \|\tilde{h}_y(m) - h_y(m)\| \leq \rho \|g(h_x(m)) - h_y(m)\|. \quad (4.59)$$

Tomando $\delta = \delta'/2$ obtemos $(C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)) \times (G \cap \mathbb{B}_\delta(y_0)) \subset (C \times G) \cap \mathbb{B}_{\delta'}((x_0, y_0))$ e se h_x e h_y são funções contínuas de M para $C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ e $G \cap \mathbb{B}_\delta(y_0)$ respectivamente então a imagem de $h(m) = (h_x(m), h_y(m))$ está contida em $(C \times G) \cap \mathbb{B}_{\delta'}((x_0, y_0))$. Portanto, o teorema 4.1.1 mostra que existem $\tilde{h}_x : M \rightarrow C$ e $\tilde{h}_y : M \rightarrow G$ que satisfazem (4.58) e (4.59) para todo m . As equações (4.13) e (4.14) seguem de (4.58) e (4.59) e terminamos. $\square$

Prova do corolário 4.1.2. Sejam δ' e ρ os números dados pelo corolário 4.1.1. Pela diferenciabilidade estrita de g no ponto x_0 implica que existe $\delta \in (0, \delta')$ tal que se $x, y \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ então $g(x_1), g(x_2) \in \mathbb{B}_\delta(g(x_0))$ e

$$4\rho\|g(x) - g(y) - dg(x_0)(x - y)\| \leq \epsilon\|x - y\|. \quad (4.60)$$

Dados $x_1, x_2 \in C \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$, definamos $M = [0, 1]$, $h_x(t) = tx_2 + (1 - t)x_1$ e $h_y(t) = tg(x_2) + (1 - t)g(x_1)$, e apliquemos o corolário 4.1.1 e tomemos $\varphi(t) = \tilde{h}_x(t)$. A equação (4.14) mostra que a prova estará completa se mostramos que

$$2\rho\|\psi(t)\| \leq \epsilon t(1 - t)\|x_2 - x_1\|, \quad (4.61)$$

para $\psi(t) = g(h_x(t)) - h_y(t)$. Para verificar esta desigualdade, note que

$$\psi(t) = t(g(h_x(t)) - g(x_2) - (1 - t)dg(x_0)(x_1 - x_2)) \quad (4.62)$$

$$+ (1 - t)(g(h_x(t)) - g(x_1) - t dg(x_0)(x_2 - x_1)). \quad (4.63)$$

A desigualdade (4.60) para $x = h_x(t) = x_2 + (1 - t)(x_1 - x_2)$ e $y = x_2$ implica que

$$4\rho\|g(h_x(t)) - g(x_2) - (1 - t)dg(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \epsilon(1 - t)\|x_1 - x_2\|. \quad (4.64)$$

O mesmo argumento com $x = h_x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ e $y = x_1$ leva a

$$4\rho\|g(h_x(t)) - g(x_1) - t dg(x_0)(x_2 - x_1)\| \leq \epsilon t\|x_1 - x_2\|.$$

A desigualdade (4.61) segue de (4.62) – (4.64) e da última equação. $\square$

Prova do teorema 4.1.2. Escrevamos $y_0 = g(x_0)$ e sejam δ e ρ os números dados pelo teorema 4.1.1. Para $\zeta \in \mathbb{R}$, defina $M_\zeta = (C \cap \mathbb{B}_\zeta(x_0)) \times [0, \zeta]$. Dado $\epsilon > 0$, encontraremos $\tau > 0$ e uma função $\varphi_\epsilon : M_\tau \rightarrow C \cap g^{-1}(G)$ tais que

$$\|\varphi_\epsilon(x, t) - x\| \leq t \quad \text{e} \quad f(\varphi_\epsilon(x, t)) \leq f(x) + (df(x_0)d + \epsilon)t. \quad (4.65)$$

Segundo a definição 5.0.2, isto prova que $|df|(x_0) \geq -df(x_0)d$. Definamos

$$\begin{aligned} \xi_f(x, w) &= f(x + w) - f(x) - df(x_0)w, \\ \xi_g(x, w) &= g(x + w) - g(x) - dg(x_0)w. \end{aligned}$$

A continuidade de g , a diferenciabilidade estrita de f e g no ponto x_0 e a hipótese que $d \in T_C(x_0)$ e $dg(x_0)d \in T_G(y_0)$ implicam que existe $\sigma \in (0, \delta)$ tal que se $x \in \mathbb{B}_\sigma(x_0)$, $y \in \mathbb{B}_\sigma(y_0)$ e $t \in [0, \sigma]$

então

$$\text{dist}(x + td, C) + \text{dist}(y + t dg(x_0) d, G) \leq \mu t, \quad (4.66)$$

$$\|\xi_g(x, w)\| + \|\xi_f(x, w)\| \leq \mu \|w\|, \quad (4.67)$$

para

$$\mu = \frac{\epsilon}{20(1 + \rho)(1 + \|dg(x_0)\|)(1 + \|df(x_0)\|)}. \quad (4.68)$$

O argumento usado para derivar (4.30) – (4.33) leva à funções contínuas $h_x : M_\sigma \rightarrow C$ e $v : M_\sigma \rightarrow G$ com

$$\|h_x(x, t) - x - td\| \leq 2\mu t \quad \text{e} \quad \|v(y, t) - y - t dg(x_0) d\| \leq 2\mu t. \quad (4.69)$$

Pela continuidade de g existe $\tau \in (0, \sigma)$ tal que se $\|x - x_0\| \leq \tau$ então $\|g(x) - y_0\| \leq \sigma$. Sejam $\tilde{h}_x : M_\tau \rightarrow C$ e $\tilde{h}_y : M_\tau \rightarrow G$ as funções obtidas aplicando o corolário 4.1.1 com h_x restrita a M_τ e $h_y : M_\tau \rightarrow G \cap \mathbb{B}_\sigma(x_0)$ dada or $h_y(x, t) = v(g(x), t)$. Estimemos agora o lado direito de (4.14) para $(x, t) \in M_\tau$:

$$\begin{aligned} \|g(h_x(x, t)) - h_y(x, t)\| &\leq \|g(h_x(x, t)) - g(x + td)\| + \|g(x + td) - g(x) - t dg(x_0) d\| \\ &+ \|h_y(x, t) - g(x) - t dg(x_0) d\| \\ &\leq (\|dg(x_0)\| + 1) \|h_x(x, t) - x - td\| + \|\xi_g(x, td)\| + \\ &+ \|v(g(x), t) - g(x) - t dg(x_0) d\| \end{aligned}$$

e as equações (4.67) – (4.69) levam a

$$\|g(h_x(x, t)) - h_y(x, t)\| \leq \frac{\epsilon}{4(1 + \rho)(1 + \|df(x_0)\|)} t$$

e (4.14) implica que

$$\|\tilde{h}_x(x, t) - h_x(x, t)\| \leq \frac{\epsilon}{4(1 + \|df(x_0)\|)} t. \quad (4.70)$$

Definindo

$$\alpha = 2\mu + \frac{\epsilon}{4(1 + \|df(x_0)\|)},$$

$\tilde{t} = (1 - \alpha)t$ and $\varphi_\epsilon : M_\tau \rightarrow C \cap g^{-1}(G)$ por $\varphi_\epsilon(x, t) = \tilde{h}_x(x, \tilde{t})$ obtemos de (4.69) – (4.70) que

$$\|\varphi_\epsilon(x, t) - x - \tilde{t}d\| \leq \|\tilde{h}_x(x, \tilde{t}) - h_x(x, \tilde{t})\| + \|h_x(x, \tilde{t}) - x - \tilde{t}d\| \leq \alpha \tilde{t}. \quad (4.71)$$

Isto implica que $\|\varphi_\epsilon(x, t) - x\| \leq (1 + \alpha)\tilde{t} = (1 - \alpha^2)t$ e φ_ϵ satisfaz a primeira desigualdade em (4.65). Para provar a segunda desigualdade, note que $\mu < \epsilon/2$, $\alpha(\|df(x_0)\| + 1) < \epsilon/2$ e as equações (4.67) e (4.71) mostram que

$$\begin{aligned} f(\varphi_\epsilon(x, t)) - f(x) &= f(x + \tilde{t}d) - f(x) + df(x_0)(\varphi_\epsilon(x, \tilde{t}) - x - \tilde{t}d) + \xi_f(x + \tilde{t}d, \varphi_\epsilon(x, \tilde{t}) - x - \tilde{t}d) \\ &\leq \tilde{t} df(x_0) d + \|\xi_f(x, \tilde{t}d)\| + (\|df(x_0)\| + 1) \|\varphi_\epsilon(x, \tilde{t}) - x - \tilde{t}d\| \\ &\leq \tilde{t} (df(x_0) d + \mu + \alpha(\|df(x_0)\| + 1)) \leq t (df(x_0) d + \epsilon). \end{aligned}$$

Isto prova a segunda desigualdade em (4.65). □

Prova do lema 4.0.1. Seja A o cone convexo fechado $A = T_C(x_0) \cap dg(x_0)^{-1} T_G(g(x_0))$. O Teorema 6.3 na página 34 de [Borwein \(1986\)](#) mostra que $A^+ = T_C(x_0)^+ + dg(x_0)^* T_G(g(x_0))^+$. Segundo a definição 4.0.3, esta prova estará completa se mostrarmos que

$$\sup_{d \in A \cap \mathbb{B}_1} -df(x_0) d = \text{dist}(df(x_0), A^+). \quad (4.72)$$

Aplicando o corolário 3.2 na página 91 de [Penot e Ratsimahalo \(1998\)](#) com $C = A^+$ e $w = df(x_0)$ e usando a reflexividade de X obtemos $y \in A \cap \mathbb{B}_1$ e $x \in A^+$ tais que $x(y) = 0$ e

$$\text{dist}(df(x_0), A^+) = \|x - df(x_0)\| = y(x - df(x_0)) = x(y) - df(x_0)y = -df(x_0)y \leq \sup_{d \in A \cap \mathbb{B}_1} -df(x_0)d.$$

Por outro lado, se $x \in A^+$ então

$$\|x - df(x_0)\| = \sup_{d \in \mathbb{B}_1} (x(d) - df(x_0)d) \geq \sup_{d \in A \cap \mathbb{B}_1} (x(d) - df(x_0)d) \geq \sup_{d \in A \cap \mathbb{B}_1} -df(x_0)d.$$

Portanto,

$$\text{dist}(df(x_0), A^+) = \inf_{x \in A^+} \|df(x_0) - x\| \geq \sup_{d \in A \cap \mathbb{B}_1} -df(x_0)d.$$

As últimas três equações implicam (4.72). $\square$

Prova do lema 4.1.1. A prova é por contradição. Se x_0 é um Ponto de Conexão então existe uma partição aberta $f_{<c} = A_1 \cup A_2$ com $x_0 \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Isto implica qhe existe $a_1 \in N \cap A_1$ e $a_2 \in N \cap A_2$. O conjunts $C_{a_1} \cup C$ é conexo porque C_{a_1} e C são conexos e $C_{a_1} \cap C \neq \emptyset$. Como $f_{<c} = A_1 \cup A_2$ é uma partição aberta e $C \subset f_{<c}$, isto implica que $C \subset C_{a_1} \cup C \subset A_1$. Pela mesma razão, $C \subset A_2$. Isto contradiz o fato de A_1 e A_2 serem disjuntos. $\square$

Prova do lema 4.1.2. Este lema é uma versão particular do teorema 4.2 na página 23 de [Borwein \(1986\)](#). $\square$

Prova do lema 4.1.3. Mostramos que se $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k \rightarrow v_\infty$ e $x_\infty \in B(v_\infty)$ então existem subseqüências v_{n_k} de v_k e $x_{n_k} \in B(v_{n_k})$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_\infty$. Se $r(v_\infty) = 0$ então o único elemento de $B(v_\infty)$ é $x_\infty = c(v_\infty)$ e para qualquer escolha de $x_k \in B(v_k)$ a seqüência $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ converge para x_∞ , pois $r(v_k) \rightarrow r(v_\infty) = 0$, $c(v_k) \rightarrow c(v_\infty) = x_\infty$ e $\|x_k - c(v_k)\| \leq r(v_k)$. Por outro lado, se $r(v_\infty) > 0$ então dado $x_\infty \in B(v_\infty)$ existe uma seqüência $\{z_m, m \in \mathbb{N}\}$ com $z_m \in A(v_\infty)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} z_m = x_\infty$. Tomamos qualquer $x_{k_0} \in A(v_0)$ e $k_0 = 0$ como o primeiro elemento de uma seqüência crescente de índices $\{k_n, n \in \mathbb{N}\}$ que produzirá os $x_{k_n} \in B(v_{k_n})$ que convergem para x_∞ . Suponhas então we já definimos $k_0, \dots, k_{n-1}$ com $x_{k_j} \in A(k_j)$ e

$$\|x_{k_j} - x_\infty\| \leq \delta_j = \frac{1}{j+1} (1 + \|x_{k_0} - x_\infty\|). \quad (4.73)$$

Seja m_n tal que se $m \geq m_n$ então

$$2\|z_{m_n} - x_\infty\| < \delta_{n+1}. \quad (4.74)$$

Pela continuidade de φ at (z_{m_n}, v_∞) existe $p_n \geq k_{n-1}$ tal que se $k \geq p_n$ então

$$2\rho\|\varphi(z_{m_n}, v_k) - \varphi(z_{m_n}, v_\infty)\| < \delta_{n+1}. \quad (4.75)$$

As definições (4.9) – (4.10) implicam que $\varphi(z_{m_n}, v_\infty) \in G$. Logo, $\text{dist}(\varphi(z_{m_n}, v_\infty), G) = 0$ e (4.10) mostra que

$$\begin{aligned} \text{dist}(z_{m_n}, R(v_k)) &\leq \rho \text{dist}(\varphi(z_{m_n}, v_k), G) \leq \rho \|\varphi(z_{m_n}, v_k) - \varphi(z_{m_n}, v_\infty)\| + \rho \text{dist}(\varphi(z_{m_n}, v_\infty), G) = \\ &\quad \rho \|\varphi(z_{m_n}, v_k) - \varphi(z_{m_n}, v_\infty)\| \end{aligned}$$

para $k \geq p_n$. A definição (4.9) implica que para cada $k \geq k_0$ existe $y_k \in C$ tal que

$$\varphi(y_k, v_k) \in G \quad \text{and} \quad \|y_k - z_{m_n}\| \leq \rho \|\varphi(z_{m_n}, v_k) - \varphi(z_{m_n}, v_\infty)\|. \quad (4.76)$$

A última equação e (4.74) (4.75) implicam que para todo $k \geq p_n$

$$\|y_k - x_\infty\| \leq \|y_k - z_{m_n}\| + \|z_{m_n} - x_\infty\| \leq \delta_{n+1}. \quad (4.77)$$

Como $z_{m_n} \in A(v_\infty)$ temos que $r(v_\infty) - \|z_{m_n} - c(v_\infty)\| > 0$. Também temos que $z_{m_n} \in U$, que é aberto. Portanto, $\text{dist}(z_{m_n}, A^c) > 0$ e podemos tomar $k = k_n \geq p_n$ tal que

$$\rho \|\varphi(z_{m_n}, v_{k_n}) - \varphi(z_{m_n}, v_\infty)\| + (r(v_\infty) - r(v_{k_n})) + \|c(v_\infty) - c(v_{k_n})\| < \mu_m, \quad (4.78)$$

para

$$\mu_m = \min \left\{ \frac{1}{2} \text{dist}(z_{m_n}, U^c), r(v_\infty) - \|z_{m_n} - c(v_\infty)\| \right\},$$

porque o lado esquerdo de (4.78) converge para 0 quando $k_n \rightarrow \infty$ e $\mu_m > 0$. Como consequência das duas últimas equações e (4.76), $x_{k_n} = y_{k_n}$ satisfaz

$$\|x_{k_n} - c(v_{k_n})\| \leq \|y_{k_n} - z_{m_n}\| + \|z_{m_n} - c(v_\infty)\| + \|c(v_\infty) - c(v_{k_n})\| < r(v_{k_n}).$$

Isto mostra que $x_{k_n} \in \mathbb{B}_{r(v_{k_n})}(c(v_{k_n}))$ por (4.11). A mesma equação mostra que

$$\text{dist}(x_{k_n}, U^c) \geq \text{dist}(z_{m_n}, U^c) - \|x_{k_n} - z_{m_n}\| \geq 2\mu_m - \rho \|\varphi(z_{m_n}, v_{k_n}) - \varphi(z_{m_n}, v_\infty)\| \geq \mu_m > 0.$$

Portanto, $x_{k_n} \in U \cap \mathbb{B}_{r(v_{k_n})}(c(v_{k_n})) \cap R(v_{k_n}) = A(v_{k_n})$. Finalmente, a segunda desigualdade em (4.77) mostra que x_{k_n} satisfaz (4.73) e a construção indutiva de x_{k_n} está completa. $\square$

Prova do lema 4.1.4. Seja δ' o número e φ a função dadas pelo corolário 4.1.2 com $\epsilon = 1/2$. Pela continuidade de g existe $\delta_0 \in (0, \delta')$ tal que se $\|x - x_0\| \leq \delta_0$ então $g(x) \in \mathbb{B}_{\delta'}(g(x_0))$. Se $\|x - x_0\| \leq \delta \leq \delta_0$ então a equação (4.15) implica que $\|\varphi(t) - tx_0 - (1-t)x\| \leq t(1-t)\|x_0 - x\|/2$. Como consequência,

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq (1-t)(1+t/2)\|x_0 - x\| \leq (1-t/2)\|x - x_0\|$$

e $\varphi(t) \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$. Portanto, para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ o conjunto $N_\delta = C \cap g^{-1}(G) \cap \mathbb{B}_\delta(x_0)$ é tal que se $x \in N_\delta$ então existe um caminho contínuo contido em N_δ conectando x a x_0 . $\square$

Lema 4.1.5 *Seja X um espaço de Banach, $C \subset X$ e $x_0 \in C$. Se $S \subset T_C(x_0)$ é um sub espaço de dimensão finita de X então dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que para todo $x \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ e $d \in S$ com $\|d\| \leq \delta$ temos que $\text{dist}(x + d, C) \leq \epsilon\|d\|$.* $\square$

Prova do lema 4.1.5. Como tem dimensão S finita, dado $\epsilon > 0$ existe $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset S$ com $\|v_i\| = 1$ tais que se $d \in S$ então existe $v_d \in V$ tal que $2\|d - \|d\|v_d\| \leq \epsilon\|d\|$. Como V é finito e $V \subset T_C(x_0)$, existe δ tal que se $\|x - x_0\| \leq \delta$, $t \in [0, \delta]$ e $v \in V$ então $2 \operatorname{dist}(x + tv, G) < \epsilon t$. Dado então $d \in S$ com $\|d\| \leq \delta$ e $x \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$ temos que

$$2 \operatorname{dist}(x + d, G) \leq 2\|d - \|d\|v_d\| + 2 \operatorname{dist}(x + \|d\|v_d, G) \leq \epsilon\|d\| + \epsilon\|d\| = 2\epsilon\|d\|.$$

Portanto, se $x \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$, $d \in S$ e $\|d\| \leq \delta$ então $\operatorname{dist}(x + d, G) \leq \epsilon\|d\|$. □

Capítulo 5

O Lema da Conexão em espaços métricos completos

Os capítulos anteriores apresentaram critérios locais para decidir se $x_0 \in F$ é um Ponto de Conexão e critérios globais que implicam a Alternativa da Conectividade. Estes critérios seguem a tradição da programação não linear e requerem condições nas derivadas de f . Neste capítulo mostramos como obter resultados semelhantes substituindo a derivada pela “weak slope”. O conceito de weak slope é discutido em profundidade em [Corvellec *et al.* \(1993\)](#) e [Ioffe e Schwartzman \(1995\)](#). Seguindo os passos de Marston Morse, estes trabalhos generalizam o conceito de norma do gradiente pela seguinte definição

Definição 5.0.2 *Seja X um espaço métrico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $u \in X$. Denote por $|df|(u)$ o supremo dos σ 's em $[0, +\infty)$ para os quais existe $\delta > 0$ e uma função contínua $\varphi : \mathbb{B}_\delta(u) \times [0, \delta] \rightarrow X$ que satisfaz*

$$\text{dist}(\varphi(v, t), v) \leq t \quad \text{e} \quad f(\varphi(v, t)) \leq f(v) - \sigma t \quad (5.1)$$

*para todo $(v, t) \in \mathbb{B}_\delta(u) \times [0, \delta]$. O número real estendido $|df|(u)$ é chamado de **weak slope** de f no ponto u .* $\square$

O próximo lema relaciona as derivadas restritas na definição 4.0.3 com a weak slope:

Lema 5.0.6 *Sejam X e Y espaços de Banach e sejam $C \subset X$ e $G \subset Y$ fechados e convexos. Suponha que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow Y$ são contínuas e estritamente diferenciáveis em $x_0 \in C \cap g^{-1}(G)$. Se $g(x_0) \in \text{core}(G - dg(x_0)(C - x_0))$ e f_F é a restrição de f a $C \cap g^{-1}(G)$ então $|df_F|(x_0) \geq \text{cdf}(x_0)$.* $\square$

Este capítulo mostra que weak slopes e Pontos de Conexão funcionam bem juntos em espaços métricos completos. Nosso primeiro resultado é análogo ao teorema 4.0.1 do capítulo anterior:

Lema 5.0.7 *Seja F um espaço métrico completo e suponha que F é localmente conexo em x_0 . Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $x_0 \in F$ é um Ponto de Conexão então $|df|(x_0) = 0$.* $\square$

A Condição de Palais Smale tem uma generalização natural para espaços métricos ([Corvellec *et al.* \(1993\)](#) e [Ioffe e Schwartzman \(1995\)](#)):

Definição 5.0.3 *Seja F um espaço métrico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f satisfaz a Condição Métrica de Palais Smale no nível c se toda seqüência $\{x_k, k \in \mathbb{N}\} \subset X$ tal que $f(x_k)$ converge para c e $|df|(x_k) \rightarrow 0$ tem um ponto de acumulação.* $\square$

Tomando por base o trabalho [Corvellec et al. \(1993\)](#) podemos enunciar o Lema da Conexão para espaços métricos completos:

Lema 5.0.8 *Seja F um espaço métrico completo e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f_{<a}$ é desconexo e há $c \in (a, +\infty]$ tal que o conjunto $f_{<c}$ é conexo e f satisfaz a Condição Métrica de Palais Smale para todo $b \in [a, c)$ então f tem um Ponto de Conexão ou uma Ponte em $f^{-1}([a, c))$.* $\square$

5.1 Provas do capítulo 5

Prova do lemma 5.0.6. O lema 5.0.6 segue do theorem 4.1.2 no capítulo anterior e da definição 4.0.3. $\square$

Prova do lema 5.0.7. Mostraremos que se $|df|(x_0) > 0$ então x_0 não é um Ponto de Conexão. Neste caso existem σ e δ positivos e uma função $\varphi : B_\delta(x_0) \times [0, \delta] \rightarrow X$ que satisfazem (5.1). Pela continuidade de f existe $\rho \in (0, \delta)$ tal que $x \in B_\rho(x_0) \Rightarrow f(x) < c + \sigma\delta/2$ e pela conectividade local de X em x_0 há uma vizinhança conexa V of x_0 contida em $B_\rho(x_0)$. A continuidade de φ implica que $C = \varphi(V, \delta)$ é conexo. Se $x \in C$ então $x = \varphi(w, \delta)$ para $w \in V$ e (5.1) implica que

$$f(x) = f(\varphi(w, \delta)) \leq f(w) - \sigma\delta \leq c + \sigma\delta/2 - \sigma\delta \leq c - \sigma\delta/2.$$

Portanto, $C \subset f_{<c}$ e todo $x \in V \cap f_{<c}$ pode ser ligado a C através do caminho $C_x = \{\varphi(x, t), t \in [0, \delta]\}$ e $C_x \subset f_{<c}$ pela segunda desigualdade em (5.1). Finalmente, lema 4.1.1 mostra que x_0 não é um Ponto de Conexão. $\square$

Prova do lemma 5.0.8. Este lema segue dos lemas 6.0.3 e 6.0.1, que são provados no próximo capítulo. $\square$

Capítulo 6

O Lema da Conexão

Este capítulo apresenta a forma geral do Lema da Conexão, que é uma versão topológica do Mountain Pass Lemma clássico. Este é mais um passo em direção à teoria C^0 de pontos críticos discutida em [Corvellec *et al.* \(1993\)](#), [Ekeland e Ghoussoub \(2002\)](#) e [Ioffe e Schwartzman \(1995\)](#) e que teve seus primórdios no próprio Marston Morse. Os trabalhos [Corvellec *et al.* \(1993\)](#), [Ekeland e Ghoussoub \(2002\)](#), [Ioffe e Schwartzman \(1995\)](#) focam em espaços métricos completos. Eles se baseiam na Condição Métrica de Palais Smale. Nós vamos um pouco além e formulamos uma versão estritamente topológica da Condição de Palais Smale, que chamamos de *Condição Topológica de Palais Smale*. A seguir mostramos que a Condição Métrica de Palais Smale implica a Condição Topológica de Palais Smale em espaços métricos completos. Portanto, este capítulo generaliza [Corvellec *et al.* \(1993\)](#), [Ekeland e Ghoussoub \(2002\)](#) e [Ioffe e Schwartzman \(1995\)](#).

Uma boa razão para generalizar o Mountain Pass Lema e a Teoria de Morse para espaços topológicos é a possibilidade de tomar quocientes ou identificar pontos de um espaço topológico e obter um outro espaço topológico, sendo que em geral ao tomarmos quocientes ou identificar pontos podemos destruir propriedades mais elaboradas, como a estrutura diferenciável. Um caso concreto de relevância prática que ilustra bem isso é a prova do teorema principal do artigo que nos motivou [Mäkeläinen *et al.* \(1981\)](#), o qual, em termos de minimização, pode ser escrito assim:

Teorema 6.0.1 (*Adaptado de [Mäkeläinen *et al.* \(1981\)](#)*) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto conexo e aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas de segunda ordem contínuas tal que $\lim_{x \rightarrow \partial A} f(x) = 0$. Se $\nabla^2 f(x) > 0$ para todo $x \in A$ tal que $\nabla f(x) = 0$ então f tem um único ponto crítico em f , que é um minimizador local, e $f(x) < 0$ para todo $x \in A$. $\square$*

A identificação de pontos no teorema acima está implícita na definição de $\lim_{x \rightarrow \partial A} f(x) = 0$:

Definição 6.0.1 *Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $\lim_{x \rightarrow \partial A} f(x) = c$ se para todo $\epsilon > 0$ existir um conjunto compacto $K \subset A$ tal que se $x \in A - K$ então $|f(x) - c| < \epsilon$. $\square$*

Esta definição permite que identifiquemos todos os pontos na fronteira de A no $\mathbb{R}^n$ estendido, $\partial A = \bar{A} - A$, como um único ponto abstrato ∞ e estendamos f para uma função contínua em $A \cup \{\infty\}$, com $f(\infty) = 0$. O espaço topológico $A \cup \{\infty\}$ resultante deste processo de identificação de pontos na fronteira de A é chamado de compactificação de Alexandroff (ou de um ponto):

Definição 6.0.2 *A compactificação de Alexandroff (ou de um ponto) do espaço topológico X , denotada por αX , é obtida adicionando um ponto ∞ a X e tomando como conjuntos abertos os abertos*

de X e os conjuntos da forma $B \cup \{\infty\}$ onde B é um aberto de X tal que $X - B$ é fechado e compacto. $\square$

É fácil ver que αX é compacto qualquer que seja X e no apêndice apresentamos outras propriedades de αX . Em termos informais αX é o que obtemos ao adicionar um ponto no infinito ∞ a X . Usando a teoria deste capítulo podemos provar uma versão topológica do teorema de Mäkeläinen:

Teorema 6.0.2 *Seja X um espaço topológico normal, Hausdorff, localmente compacto e conexo, $\alpha X = X \cup \{\infty\}$ a sua compactificação de Alexandroff e $f : \alpha X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se os minimizadores locais de f em X são estritos e f não tem máximos locais em X então $f(x) < f(\infty)$ para todo $x \in X$ e f tem um único minimizador local em X se e somente se f não tem Pontos de Conexão em X .* $\square$

O conceito de compacticidade local no teorema acima é definido assim:

Definição 6.0.3 *O espaço topológico F é localmente compacto se para todo $x \in F$ existir um aberto A_x tal que $x \in A_x$ e $\overline{A_x}$ é compacto.* $\square$

O teorema de Mäkeläinen 6.0.1 segue do teorema 6.0.2 pois a hipótese $\lim_{x \rightarrow \partial A} f(x) = 0$ implica que f pode ser estendida a função contínua $f : \alpha A \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(\infty) = 0$ e a hipótese que $\nabla^2 f(x) > 0$ para todo $x \in A$ implica que f não tem máximos locais ou Pontos de Conexão em A e todos os minimizadores locais em A são estritos. Além disso, a positividade de $\nabla^2 f(x)$ para todo $x \in A$ implica que todos os pontos críticos de f em A são mínimos locais e portanto, neste caso, ao mostrarmos a unicidade do mínimo local provamos também que só há um ponto crítico.

Em termos mais abstratos e especulativos, a importância de quocientes em análise variacional é ilustrada pelo princípio da Concentração-Compacticidade, que foi proposto por P. Lions na série de artigos Lions (1984a), Lions (1984b), Lions (1985a) and Lions (1985b) e é explicado no capítulo 4 de Struwe (2000), em Tintarev e Fieseler (2007) no blog Tao (2009). Não discutiremos este princípio aqui, pois ainda precisamos pensar mais sobre este assunto e analisar com calma as consequências do trabalho Tintarev (2009). Porém, neste espírito, observamos que os espaços nesta seção não precisam ser Hausdorff. No apêndice discutimos esta questão em um pouco mais de detalhe e mostramos, por exemplo, que o quociente de um espaço de Banach por um sub espaço S é sempre normal e que este quociente é Hausdorff se e somente se S é fechado. Em termos mais gerais, se G é um grupo topológico que age continuamente em um espaço normal X e H é um subgrupo de X (fechado ou não) então basta que $X/\overline{H}$ seja normal para que X/H seja normal (ou seja, o fato de H ser fechado é irrelevante para a normalidade de X/H .)

Se F é normal então a propriedade de Hausdorff não é importante para analisar a conectividade dos conjuntos $f_{<c}$ e Pontes e Pontos de Conexão propósitos porque podemos argumentar usando o fecho $\bar{x}$ do ponto x ao invés de x mesmo. Porém, normalidade é essencial em nossa abordagem porque freqüentemente precisamos substituir a condição $A \cap B \cap C = \emptyset$ na definição 1.0.1 por $A \cap B = \emptyset$ quando C é fechado, como ilustrado no lema A.1.3 apresentado no apêndice.

Este capítulo enfatiza que Pontes e Pontos de Conexão são uma consequência em um sinal das mudanças na conectividade dos conjuntos $f_{<c}$ ao variarmos c . Para entendê-los precisamos apenas nos preocupar com a relação entre as partições dos conjuntos de nível $f_{\leq c}$ e $f_{<c}$, como na seguinte propriedade:

Definição 6.0.4 *Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f tem a Propriedade da Extensão no nível c se para toda partição fechada $f_{\leq c} = U_1 \cup U_2$ há uma seqüência decrescente $\{c_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ e partições abertas $f_{< c_n} = A_{1n} \cup A_{2n}$ com $U_1 \subset A_{1n}$, $U_2 \subset A_{2n}$ e $\overline{A_{1n}} \cap \overline{A_{2n}} = \emptyset$. $\square$*

Em palavras, f tem a Propriedade da Extensão no nível c se toda partição fechada de $f_{\leq c}$ pode ser estendida a partições abertas de $f_{< c+\epsilon}$ para ϵ suficientemente pequeno. Isto é tudo que há por trás do Lema da Conexão em espaços topológicos e acreditamos que a mesma afirmação se aplica ao Mountain Pass Lemma. Aqui está o Lema da Conexão Geral:

Lema 6.0.1 *Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f_{< a}$ é desconexo e há $c \in (a, +\infty]$ tal que o conjunto $f_{< c}$ é conexo e f tem a Propriedade da Extensão para $b \in [a, c)$ então f tem um Ponto de Conexão ou uma Ponte em algum nível em $f^{-1}([a, c))$. $\square$*

A função semi contínua inferiormente $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + x$ para $x < 0$ e $f(x) = x$ para $x \geq 0$ satisfaz todas as condições na hipótese do lema 6.0.1 a menos da continuidade para $a \in (0, 1)$ e $c = 1$, mas ela não tem Pontes ou Pontos de Conexão. Portanto, não podemos substituir continuidade por semi continuidade inferior no lema 6.0.1 e o mesmo se aplica ao resto deste capítulo e ao resto desta tese.

A parte difícil ao usar o Lema da Conexão 6.0.1 é, obviamente, verificar que f tem a Propriedade da Extensão. Em artigos sobre Teoria de Morse e o Mountain Pass Lemma que assumem diferenciabilidade a Propriedade da Extensão é derivada das propriedades do fluxo do campo gradiente. Basicamente, eles consideram a solução $\psi(x, t)$ da equação diferencial

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\nabla f(\psi(x, t)) \quad \text{e} \quad \psi(x, 0) = x,$$

tomam $A_{in} = \{x \in F \text{ com } \psi(x, 1/n) \in U_i\}$ na definição 6.0.4 e usam a Propriedade da Extensão de um modo ou de outro. Eles precisam da condição de Palais Smale clássica para lidar com os zeros do campo gradiente, que leva a pontos estacionários no fluxo.

As referências Corvellec *et al.* (1993), Ekeland e Ghoussoub (2002), Ioffe e Schwartzman (1995) fazem o mesmo em espaços métricos completos usando a weak slope. Portanto, as versões correntes da Condição de Palais Smale podem ser interpretadas como hipóteses sob as quais é possível definir um fluxo gradiente bem comportado fora de vizinhanças arbitrariamente justas dos conjuntos de pontos críticos. Nós propomos algo semelhante para os espaços topológicos:

Definição 6.0.5 *Seja F um espaço topológico, $c \in \mathbb{R}$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $K \subset F$ é fc -compacto se para todo conjunto fechado $C \subset K$ com $\inf_{x \in C} f(x) > c$ existe $d > c$ tal que $C \subset f_{> d}$. $\square$*

Definição 6.0.6 *Seja F um espaço topológico, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que f satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ se existe um conjunto fc -compacto K_c tal que para todo conjunto aberto $A \supset K_c$ existe $d > c$ e uma função contínua*

$\psi : f_{<d} \times [0, 1] \rightarrow F$ tal que, para $x \in f_{<d}$,

$$\psi(x, 0) = x, \quad (6.1)$$

$$f(\psi(x, t)) \leq f(x) \text{ para todo } t \in [0, 1], \quad (6.2)$$

$$f(\psi(x, 1)) \geq c \Rightarrow \psi(x, t) \in A \text{ para todo } t \in [0, 1]. \quad (6.3)$$

□

Se f é contínua então todo conjunto compacto é f_c -compacto e a condição 6.0.6 é satisfeita se $f_{\leq d}$ é compacto e $c < d$ (tome $K_c = f_{\leq d}$ and $\psi(x, t) = x$). No contexto diferencial poderíamos tomar K_c como o conjunto de pontos críticos $x \in f^{-1}(c)$ e Corvellec *et al.* (1993), Ekeland e Ghoussoub (2002) e Ioffe e Schwartzman (1995) explicam como estender esta idéia para espaços métricos completos. Acreditamos que a definição 6.0.6 captura a essência das outras condições de Palais Smale e nos permite provar a existência de pontos críticos no contexto topológico. Como as outras definições, ela requer um fluxo sem pontos estacionários fora de vizinhanças arbitrariamente justas de um conjunto crítico f_c -compacto. Ela é justificada pelo seguinte lema:

Lema 6.0.2 *Seja F um espaço topológico normal, $c \in \mathbb{R}$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale no nível c então ela tem a Propriedade da Extensão neste nível.* □

Assim, quando combinada com o lema 6.0.1 a Condição Topológica de Palais Smale leva aos mesmos resultados obtidos sob a condição usual de Palais Smale Além disso, o lema seguinte mostra que a condição topológica é implicada pelas condições diferenciais quando derivadas (ou suas generalizações) estão disponíveis:

Lema 6.0.3 *Seja F um espaço métrico completo e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f satisfaz a Condição Métrica de Palais Smale no nível c , definida em 5.0.3, então ela também satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale neste nível, com um conjunto K_c compacto e contido em $f^{-1}(c)$ e $\overline{f_c^{\min}} \subset K_c$.* □

O conjunto $f_c^{\min}$ no lema acima é definido como:

Definição 6.0.7 *Se F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos por $f_c^{\min}$ o conjunto de minimizadores locais x de f tais que $f(x) = c$.* □

Terminamos este capítulo descrevendo algumas propriedades da Condição Topológica de Palais Smale. As provas dos teoremas nos demais capítulos ilustram como elas podem ser usadas.

Lema 6.0.4 *Seja F um espaço topológico e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\mu = \inf_{x \in F} f(x) > -\infty$ e f satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale para μ então $K_\mu \cap f^{-1}(\mu) \neq \emptyset$.* □

Lema 6.0.5 *Seja F um espaço topológico normal. Suponha que $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale Condition no nível c . Se $f_{\leq c}$ é desconexo então existe $b > c$ tal que $f_{<a}$ é desconexo para todo $a \in (c, b)$.* □

6.1 Provas do capítulo 6

Prova do teorema 6.0.2. Como αX é compacto o conjunto M de máximos globais de f em αX é não vazio. Como, por hipótese, f não tem máximos locais em X e devemos ter $M = \{\infty\}$ $f(x) < f(\infty)$ para todo $x \in X$. Além disso, como f não tem máximos locais em X este conjunto não é compacto. Como, segundo o lema A.2.6, $\overline{X}$ é compacto e portanto diferente de X devemos ter $\overline{X} = \alpha X$ e αX é conexo, pois o fecho de um conjunto conexo é conexo. Além disso, como X é denso em αX o ponto ∞ não é um mínimo local. Finalmente, os lemas A.1.4 e A.2.4 mostram que αX é normal e Hausdorff e para terminar a prova basta usar os teoremas 1.0.2 e 1.0.2. $\square$

Prova do lema 6.0.1. Como $f_{<a}$ é aberto e desconexo há uma partição aberta $f_{<a} = A \cup C$. Se $\overline{A} \cap \overline{C} \neq \emptyset$ então qualquer $z \in \overline{A} \cap \overline{C}$ é um Ponto de Conexão no nível a e terminamos. Para completar a prova assumimos então que não há Pontos de Conexão em $f^{-1}([a, c))$ e que $\overline{A} \cap \overline{C} = \emptyset$ e mostramos que há uma Ponte em $f^{-1}([a, c))$. Começamos com a observação que (A, C, a) é membro da classe $\mathcal{T}$ de triplas (U, V, b) tais que

$$b \in [a, c), \quad (6.4)$$

$$f_{<b} = U \cup V, \quad (6.5)$$

$$\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset, \quad (6.6)$$

$$A \subset U \text{ e } C \subset V \quad (6.7)$$

e U e V são abertos. Considere a ordem parcial $\preceq$ em $\mathcal{T}$ dada por

$$(U_1, V_1, b_1) \preceq (U_2, V_2, b_2) \Leftrightarrow (b_1 \leq b_2, U_1 \subset U_2 \text{ and } V_1 \subset V_2). \quad (6.8)$$

Afirmamos que toda cadeia para $\preceq$ tem um limitante superior. De fato, dada uma cadeia $\mathfrak{C} = \{(U_\lambda, V_\lambda, b_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ em $(\mathcal{T}, \preceq)$ defina $b_\infty = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ e

$$U_\infty = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad \text{e} \quad V_\infty = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

É claro que $f_{<b_\infty} = U_\infty \cup V_\infty$, U_∞ e V_∞ são abertos e $U_\infty \cap V_\infty = \emptyset$. Isto implica que $U_\infty \cap \overline{V_\infty} = \overline{U_\infty} \cap V_\infty = \emptyset$. A partição aberta $f_{<b_\infty} = U_\infty \cup V_\infty$ mostra que $b_\infty < c$, pois $f_{<c}$ é conexo e $f_{<b_\infty}$ não é. Se $b_\infty \in \{b_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ então $(b_\lambda, U_\lambda, V_\lambda)$ para λ tal que $b_\lambda = b_\infty$ é um limitante superior para a cadeia. Logo, podemos assumir que $b_\infty > b_\lambda$ para todo λ . Note que não há $z \in \overline{U_\infty} \cap \overline{V_\infty}$ com $f(z) = b_\infty$ (tal z seria um Ponto de Conexão). Provamos agora que $\overline{U_\infty} \cap \overline{V_\infty} = \emptyset$ tomando $z \in \overline{U_\infty}$ e mostrando que $z \notin \overline{V_\infty}$. De fato, podemos assumir que $f(z) < b_\infty$ e então existe α tal que $f(z) < b_\alpha$, pois $b_\infty > b_\lambda$ para todo λ . A equação (6.5) implica que $z \in U_\alpha \cup V_\alpha$. Porém, $z \notin V_\alpha$ pois $\overline{U_\infty} \cap V_\alpha \subset \overline{U_\infty} \cap V_\infty = \emptyset$. Logo, $z \in U_\alpha$ e $z \notin \overline{V_\infty}$ porque U_α é aberto e $U_\alpha \cap V_\infty \subset U_\infty \cap V_\infty = \emptyset$. Portanto, $\overline{U_\infty} \cap \overline{V_\infty} = \emptyset$ e $(U_\infty, V_\infty, b_\infty)$ é um limitante superior para a cadeia $\mathfrak{C}$.

O último parágrafo e o lema de Zorn fornecem um elemento maximal (U_*, V_*, b_*) para $\preceq$. Se $B = f_{\leq b_*} - (\overline{U_*} \cup \overline{V_*})$ pudesse ser decomposto como $B = B_u \cup B_v$ de modo que $(\overline{U_*} \cup \overline{B_u}) \cap (\overline{V_*} \cup \overline{B_v}) = \emptyset$ então aplicando a Propriedade da Extensão de f para $U = \overline{U_*} \cup \overline{B_u}$ e $V = \overline{V_*} \cup \overline{B_v}$ obteríamos $d \in (b, c)$ e conjuntos abertos U_d e V_d tais que (U_d, V_d, d) contradiriam a maximalidade de (U_*, V_*, b_*) . Portanto, não há B_u e B_v como acima e B é uma Ponte. $\square$

Prova do lema 6.0.2. Esta prova usa o lema 6.1.1, provado no fim desta seção e o lema A.2.7

do apêndice. Sejam A_1 e A_2 conjuntos abertos com $f_{\leq c} \subset A_1 \cup A_2$ e $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$ e K_c o conjunto f_c -compacto na definição 6.0.6. O conjunto $R = K_c - A_1 \cup A_2$ também é f_c -compacto e $R \cap f_{\leq c} = \emptyset$. Portanto, existe $s > c$ tal que $R \subset f_{>s}$. O conjunto aberto $A = f_{>s} \cup A_1 \cup A_2$ contém K_c . Logo, a Condição Topológica de Palais Smale fornece $d \in (c, s)$ e uma função contínua $\psi : f_{<d} \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisfaz (6.1) – (6.3). Para completar esta prova mostramos que $\varphi(x) = \psi(x, 1)$ e, para $i = 1, 2$,

$$B_i = \{x \in X \text{ com } \psi(x, t) \in A_i \text{ para } t \in [0, 1]\} \cap f_{<d}, \quad (6.9)$$

satisfazem (6.13)–(6.15). O Lema A.2.7 mostra que B_1 e B_2 são abertos. Tomando $t = 0$ na definição de B_1 e B_2 e usando (6.1) concluímos que $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$. Fazendo $t = 1$ nestas definições obtemos (6.13).

Para verificar (6.14) note que se $x \in A_1 \cap f_{\leq c}$ então (6.2) implica que $\psi(x, t) \in f_{\leq c} \subset A_1 \cup A_2$ para todo t . Como $\psi(x, 0) = x \in A_1$, $C_x = \{\psi(x, t), t \in [0, 1]\}$ é conexo e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ devemos ter $C_x \subset A_1$. Em particular, $\varphi(x) = \psi(x, 1) \in A_1$. Portanto, (6.14) é válida.

Finalmente, para provar (6.15), tomemos $x \in f_{<d}$ com $f(\varphi(x)) \geq c$. Neste caso (6.3) mostra que $\psi(x, t) \in A = f_{>c} \cup A_1 \cup A_2$ para todo t . Além disso, (6.2) mostra que $f(\psi(x, t)) < d < s$ para todo t e, por definição de s , $\psi(x, t) \notin f_{>c}$ para todo t . Portanto, $\psi(x, t) \in A_1 \cup A_2$ para todo t . Pelo mesmo argumento de conectividade do último parágrafo concluímos que ou (i) $\psi(x, t) \in A_1$ para todo t ou (ii) $\psi(x, t) \in A_2$ para todo t . Equação (6.9) mostra que no caso (i) $x \in B_1$ e no caso (ii) $x \in B_2$. Isto prova (6.15). $\square$

Prova do lema 6.0.3. Nossa prova usa o teorema (2.14) em Corvellec *et al.* (1993). O conjunto f_c -compacto K_c é definido como

$$K_c = \{ x \in f^{-1}(c) \text{ com } |df|(x) = 0 \}.$$

Ele é compacto e está contido em $f^{-1}(c)$ e $\overline{f_c^{\min}} \subset K_c$. O Teorema (2.14) em Corvellec *et al.* (1993) pode ser enunciado como:

Teorema 6.1.1 (por Corvellec, Degiovanni e Marzocchi) *Seja X um espaço métrico completo, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se f satisfaz a Condição Métrica de Palais Smale no nível c então dados $\bar{\epsilon} > 0$, uma vizinhança B de K_c e $\lambda > 0$ existem $\epsilon > 0$ e $\phi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ contínua tais que*

$$\text{dist}(\phi(x, t), x) \leq \lambda t, \quad (6.10)$$

$$f(\phi(x, t)) \leq f(x), \quad (6.11)$$

$$|f(u) - c| \geq \bar{\epsilon} \Rightarrow \phi(u, t) = u,$$

$$u \in f_{\leq c+\epsilon} - B \Rightarrow f(\phi(x, 1)) \leq c - \epsilon. \quad (6.12)$$

$\square$

Dado um conjuntos aberto $A \supset K_c$ nós aplicamos o teorema 6.1.1 com

$$B = \{x \in X \text{ with } \text{dist}(x, K_c) < \delta \},$$

$\delta = \text{dist}(K_c, X - A) / 3$, $\bar{\epsilon} = 1$ e $\lambda = \delta$ e obtemos ϵ and ϕ como em (6.10) – (6.12). Tome $d = c + \epsilon$ e ψ como a restrição de ϕ a $f_{<d} \times [0, 1]$. A Equação (6.10) mostra que ψ satisfaz a condição (6.1)

na definição 6.0.6 e a equação (6.11) leva a (6.2). Finalmente, (6.12) mostra que se $f(\psi(x, 1)) \geq c$ então $x \in B$. A definição de B e as equações (6.10) implicam que, para $t \in [0, 1]$ e $x \in A$,

$$\text{dist}(\psi(x, t), K_c) \leq 2\delta < 3\delta = \text{dist}(X - A, K_c).$$

Como $K_c \subset A$, as últimas desigualdades implicam que $\psi(x, t) \in A$ para $t \in [0, 1]$. Em resumo, mostramos que $f(\psi(x, 1)) \geq c \Rightarrow \psi(x, t) \in A$ para $t \in [0, 1]$. Esta é a última exigência na definição 6.0.6 e esta prova está completa. $\square$

Prova do lema 6.0.4. Argumentamos por contradição para mostra que $a = \inf_{x \in K_\mu} f(x) = \mu$ (Para lidar com o caso degenerado $K_\mu = \emptyset$ tome $a = \mu + 1$). De fato, se $a > \mu$ então a f -compacticidade de K_μ fornece $s \in (\mu, a)$ tal que $K_\mu \subset f_{>s}$. Tomando o conjunto aberto $A = f_{>s}$, obtemos da Condição Topológica de Palais Smale d e ψ que satisfazem (6.1)–(6.3). Porém, tomando $b = \min\{d, s\}$ obtemos que $b > \mu = \inf_{x \in F} f(x)$ e existe $x \in F$ com $f(x) \in (\mu, b)$. A equação (6.2) mostra que o ponto $z = \psi(x, 1)$ satisfaz $f(z) < b \leq s$. Portanto, $z \notin A = f_{>s}$ e (6.3) implica que $f(z) = f(\psi(x, 1)) < \mu$. Isto contradiz a minimalidade de μ e o nosso argumento está completo. $\square$

Prova do lema 6.0.5 Esta prova usa os lemas A.1.3 e A.2.7 do apêndice. Como F é normal e $f_{\leq c}$ é desconexo, o lema A.1.3 fornece conjuntos abertos disjuntos U_1 e U_2 com $f_{\leq c} \subset U_1 \cup U_2$. O conjunto $C = K_c - (U_1 \cup U_2)$ é f -compacto e $f(x) > c$ para $x \in C$. Portanto, existe $e > c$ tal que $C \subset f_{>e}$ e o conjunto aberto $A = U_1 \cup U_2 \cup f_{>e}$ contém K_c . Seja ψ e d a função e o número correspondentes dados pela definição 6.0.6. Tome $b = \min\{d, e\}$. Para cada $a \in (c, b)$, $x \in f_{<a}$ e $t \in [0, 1]$, a equação (6.2) mostra que $\psi(x, t) \notin f_{<d}$. Como consequência, a equação (6.3) implica que se $x \in f_{<a}$ e $\psi(x, 1) \geq c$ então $x \in B_1 \cup B_2$, onde $B_i = \{x \in f_{<a} \text{ com } \psi(x, t) \in U_i \text{ para } t \in [0, 1]\}$. Os conjuntos B_i são abertos pelo lema A.2.7 aplicado a $X = f_{<d}$ e $Y = [0, 1]$. Definido $\varphi(x) = \psi(x, 1)$, os conjuntos $C_i = \varphi^{-1}(U_i \cap f_{<c})$ são abertos também e o mesmo vale para $D_i = B_i \cup C_i$. É claro que $f_{<a} = D_1 \cup D_2$ and $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, pois $B_1 \cap B_2 = B_1 \cap C_2 = C_1 \cap B_2 = C_1 \cap C_2$ é uma consequência direta do modo como estes conjuntos foram definidos. Portanto, $f_{<a}$ é desconexo. $\square$

Lema 6.1.1 *Seja F um espaço topológico normal, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$. Se para todo par A_1, A_2 de conjuntos abertos com $f_{\leq c} \subset A_1 \cup A_2$ e $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$ existirem $d > c$ e conjuntos abertos $B_1 \subset A_1 \cap f_{<d}$ e $B_2 \subset A_2 \cap f_{<d}$ e uma função contínua $\varphi : f_{<d} \rightarrow F$ tal que*

$$\varphi(B_1) \subset A_1 \quad \text{e} \quad \varphi(B_2) \subset A_2, \quad (6.13)$$

$$\varphi(A_1 \cap f_{<c}) \subset A_1 \quad \text{e} \quad \varphi(A_2 \cap f_{<c}) \subset A_2, \quad (6.14)$$

e, para $x \in f_{<d}$,

$$f(\varphi(x)) \geq c \Rightarrow x \in B_1 \cup B_2, \quad (6.15)$$

então f tem a Propriedade da Extensão no nível c . $\square$

Prova do lema 6.1.1. Seja $f_{\leq c} = U_1 \cup U_2$ uma partição fechada de $f_{\leq c}$. A normalidade de F fornece conjuntos abertos disjuntos $F_1 \supset U_1$ e $F_2 \supset U_2$. A normalidade também implica que existem conjuntos abertos disjuntos $A_1 \supset U_1$ e $G_1 \supset X - F_1$. Isto implica que $\overline{A_1} \cap (F - F_1) = \emptyset$ e então $\overline{A_1} \subset F_1$. Pela mesma razão existe um conjunto aberto $A_2 \supset U_2$ com $\overline{A_2} \subset F_2$. Portanto, $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \subset F_1 \cap F_2 = \emptyset$ e a hipótese leva a $d > c$, B_1 , B_2 e φ como em (6.13) – (6.15).

Os conjuntos

$$C_1 = A_1 \cap f_{<c} \quad \text{and} \quad C_2 = A_2 \cap f_{<c} \quad (6.16)$$

são abertos e disjuntos. Pela continuidade de φ , os conjuntos

$$D_1 = \varphi^{-1}(C_1) \quad \text{and} \quad D_2 = \varphi^{-1}(C_2) \quad (6.17)$$

também são abertos e disjuntos. As equações (6.15) e (6.16) e o fato que $f_{<c} \subset A_1 \cup A_2$ levam a

$$f_{<d} \subset E_1 \cup E_2, \quad (6.18)$$

para

$$E_1 = B_1 \cup D_1 \quad \text{e} \quad E_2 = B_2 \cup D_2. \quad (6.19)$$

Segundo a equação (6.13), $\varphi(B_1) \subset A_1$. Isto implica que $B_1 \cap D_2 = \emptyset$, pois $\varphi(D_2) \subset C_2 \subset A_2$ e $A_2 \cap \varphi(B_1) = \emptyset$. Pela mesma razão $B_2 \cap D_1 = \emptyset$. Portanto, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e como estes conjuntos são abertos

$$\overline{E}_1 \cap E_2 = E_1 \cap \overline{E}_2 = \emptyset. \quad (6.20)$$

A sequência $c_n = ((n+1)c+d)/(n+2)$ é decrescente, $c_n \in (c, d)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$. Agora mostramos que

$$A_{1n} = E_1 \cap f_{<c_n} \quad \text{e} \quad A_{2n} = E_2 \cap f_{<c_n} \quad (6.21)$$

satisfaz as exigências da definição 6.0.4. Começamos observando que (6.18) e $c_n < d$ levam a

$$A_{1n} \cup A_{2n} = (E_1 \cup E_2) \cap f_{<c_n} \supset f_{<d} \cap f_{<c_n} = f_{<c_n}.$$

Por outro lado, (6.21) mostra que $A_{1n} \cup A_{2n} \subset f_{<c_n}$. Portanto, a condição $A_{1n} \cup A_{2n} = f_{<c_n}$ é satisfeita. Para provar que $U_1 \subset A_{1n}$, considere $x \in U_1 \subset f_{\leq c}$. Se $f(\varphi(x)) \geq c$ então (6.15) leva a

$$x \in (B_1 \cup B_2) \cap U_1 \subset B_1 \cap f_{\leq c} \subset A_{1n}.$$

Se $f(\varphi(x)) < c$ então (6.16) implica que $\varphi(x) \in C_1$, pois (6.14) mostra que $\varphi(x) \in A_1$. Portanto $x \in D_1 = \varphi^{-1}(C_1)$ e $x \in (B_1 \cup D_1) \cap f_{\leq c} \subset (B_1 \cup D_1) \cap f_{<c_n} = A_{1n}$. Isto mostra que as condições $U_1 \subset A_{1n}$ e $U_2 \subset A_{2n}$ também são satisfeitas. Agora, (6.21) mostra que $\overline{A}_{1n} \subset \overline{E}_1$ e (6.20) implica que $\overline{A}_{1n} \cap E_2 = \emptyset$. A equação (6.21) também mostra que $\overline{A}_{1n} \subset \overline{f_{<c_n}} \subset f_{<d}$ e (6.18) combinada com $\overline{A}_{1n} \cap E_2 = \emptyset$ leva a $\overline{A}_{1n} \subset E_1$. Pela mesma razão, $\overline{A}_{2n} \subset E_2$. Finally, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ implica a última condição: $\overline{A}_{1n} \cap \overline{A}_{2n} = \emptyset$. $\square$

Capítulo 7

Funções com conjuntos de nível conexos

Como vimos no capítulo 2, devemos considerar dois casos ao analisarmos a unicidade dos minimizadores locais: (i) os conjuntos $f_{<c} = \{x \in F \text{ with } f(x) < c\}$ são conexos para todo c (ii) alguns conjuntos $f_{<c}$ são desconexos. Os capítulos anteriores mostram que o caso (ii) pode ser abordado através de Pontes e Pontos de Conexão. Neste capítulo analisamos o caso (i). Mostramos que neste caso se f tem mais de um minimizador local então ela tem um conjunto complexo de minimizadores locais, como descrito no item (iv) da Alternativa da Conectividade definida em 2.0.7.

Usaremos a seguinte definição:

Definição 7.0.1 *Seja F um espaço topológico e $x \in C \subset F$. Definimos*

$$\mathcal{C}(x, C) = \bigcup_{A \subset C \text{ conexo com } x \in A} A.$$

□

Em palavras, $\mathcal{C}(x, C)$ é a união de todos os subconjuntos conexos de C que contém x . É claro que $x \in \mathcal{C}(x, C)$ e que $\mathcal{C}(x, C)$ é conexo.

Seja $f_c^{\min}$ o conjunto definido em 6.0.7. Se $x \in f_c^{\min}$ e $\overline{\mathcal{C}(x, f_c^{\min})} \cap \overline{f_{<c}} \neq \emptyset$ então $\mathcal{C}(x, f_c^{\min})$ é um Terraço (veja a definição 2.0.5). Esta é a situação usual para os minimizadores locais múltiplos quando os conjuntos $f_{<c}$ são conexos. Os minimizadores locais múltiplos excepcionais pertencem ao conjunto

$$D_c = \left\{ x \in f_c^{\min} \text{ tais que } \overline{\mathcal{C}(x, f_c^{\min})} \cap \overline{f_{<c}} = \emptyset \right\}. \quad (7.1)$$

Usando os termos acima podemos enunciar o primeiro teorema nesta seção:

Teorema 7.0.2 *Seja F um espaço topológico normal e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é limitada inferiormente e, para todo $c \in \mathbb{R}$, $D_c = \emptyset$, $f_{<c}$ é conexo, e f satisfaz a Condição Topológica de Palais Smale no nível c , então ou f tem um único minimizador local ou f satisfaz o item (iv) na Alternativa da Conectividade na definição 2.0.7.* □

Apresentamos agora nosso último lema. Ele mostra que o fato de D_c ser vazio é uma consequência de versões da clássicas da condição de Palais-Smale e dos lemas 6.0.3 e 6.0.5. Assim, perdemos pouca generalidade ao assumirmos que $D_c = \emptyset$ no teorema 7.0.2.

Lema 7.0.2 *Seja F um espaço topológico normal, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $c > \inf_{x \in F} f(x)$. Se $\overline{f_c^{\min}}$ é compacto e $D_c \neq \emptyset$ então $f_{\leq c}$ é desconexo.* □

7.1 Provas do capítulo 7

No fim desta seção provaremos os seguintes lemas:

Lema 7.1.1 *Seja F um espaço topológico e $x \in C \subset F$. Se $\overline{\mathcal{C}(x, C)} \subset C$ então $\mathcal{C}(x, C)$ é fechado. Em particular, se C é fechado então $\mathcal{C}(x, C)$ é fechado.* $\square$

Lema 7.1.2 *Seja F um espaço topológico. Se $A \subset B \subset F$ e $x \in A$ então $\mathcal{C}(x, A) \subset \mathcal{C}(x, B)$.* $\square$

Lema 7.1.3 *Seja F um espaço topológico. Se $A \subset B \subset F$ e $\mathcal{C}(x, B) \subset A$ então $\mathcal{C}(x, A) = \mathcal{C}(x, B)$.* $\square$

Lema 7.1.4 *Seja F um espaço topológico normal e seja $D \subset F$ um subconjunto fechado e compacto. Se $x, y \in D$ e $y \notin \mathcal{C}(x, D)$ então há conjuntos abertos disjuntos A e B com $D \subset A \cup B$, $\mathcal{C}(x, D) \subset A$ e $y \in B$.* $\square$

Lema 7.1.5 *Seja F um espaço topológico normal, $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $c > \inf_{x \in F} f(x)$. Se $\overline{f_c^{\min}}$ é compacto e existe $x \in f_c^{\min}$ e conjuntos abertos disjuntos A e C tais que $\overline{f_{<c}} \subset A$ e $\mathcal{C}(x, f_c^{\min}) \subset C$ então $f_{\leq c}$ é desconexo.* $\square$

Prova do teorema 7.0.2. O Lema 6.0.4 mostra que o conjunto $f_\mu^{\min}$ definido em 6.0.7 é não vazio para $\mu = \inf_{x \in F} f(x)$. Portanto, f tem pelo menos um minimizador global. Se f tem apenas um minimizador local então ela satisfaz o item (i) na Alternativa da Conectividade e a prova está completa. Assumamos então que f tem múltiplos minimizadores locais. O Lema 6.0.5 mostra que os conjuntos $f_{\leq c}$ são conexos para todo $c \in \mathbb{R}$. Portanto $f_\mu^{\min} = f_{\leq \mu}$ é conexo. Se $f_\mu^{\min}$ tem mais de um elemento então ele é um Plateau segundo a definição 2.0.4 e o item (iv).(b) na Alternativa da Conectividade é satisfeito. Se w é algum outro minimizador local com $c = f(w) > \mu$ então $\overline{\mathcal{C}(x, f_c^{\min})} \cap \overline{f_{<c}} \neq \emptyset$ porque $x \notin D_c = \emptyset$. O conjunto $\mathcal{C}(x, f_c^{\min})$ é um Terraço e w satisfaz item (iv).(a) na Alternativa da Conectividade. $\square$

Prova do lema 7.0.2. Se $x \in D_c$ então $\overline{f_{<c}} \cap \overline{\mathcal{C}(x, f_c^{\min})} = \emptyset$ e $\overline{\mathcal{C}(x, f_c^{\min})} \subset f_c^{\min}$ pois $\overline{f_c^{\min}} \subset f_c^{\min} \cup \overline{f_{<c}}$. e o lema 7.1.1 mostra que $\mathcal{C}(x, f_c^{\min})$ é fechado. A normalidade de F fornece conjuntos abertos disjuntos $A \supset \overline{f_{<c}}$ e $C \supset \mathcal{C}(x, f_c^{\min})$ e o lema 7.0.2 segue do lema 7.1.5. $\square$

Prova do lema 7.1.1. Afiramos que se $y \in \overline{\mathcal{C}(x, C)}$ então $y \in \mathcal{C}(x, C)$, porque $U = \{y\} \cup \mathcal{C}(x, C) \subset C$ é conexo e contém y . De fato, sejam A e B conjuntos abertos tais que $U \subset A \cup B$, $A \cap B \cap U = \emptyset$ e $x \in A$. Pela conectividade de $\mathcal{C}(x, C)$ temos que $\mathcal{C}(x, C) \subset A$. Isto mostra que $B \cap \mathcal{C}(x, C) = \emptyset$ e $y \notin B$ pois $y \in \overline{\mathcal{C}(x, C)}$. Portanto, $y \in A$, $B \cap U = \emptyset$ and U é de fato conexo. Finalmente, $\mathcal{C}(x, C) \subset C$ implica que $\overline{\mathcal{C}(x, C)} \subset \overline{C}$ e se C é fechado então $\overline{C} = C$ e a primeira parte desta prova implica que $\mathcal{C}(x, C)$ é fechado. $\square$

Prova do lema 7.1.2. Se $x \in \mathcal{C}(x, A)$ então existe um conjunto conexo $C \subset A$ com $x, y \in C$. Como $A \subset B$ temos que $C \subset B$ e $y \in \mathcal{C}(x, B)$. $\square$

Prova do lema 7.1.3. O Lema 7.1.2 mostra que $\mathcal{C}(x, A) \subset \mathcal{C}(x, B)$. Por outro lado, se $y \in \mathcal{C}(x, B)$ então existe $C \subset B$ conexo com $x, y \in C$. Isto implica que $C \subset \mathcal{C}(x, B) \subset A$, $y \in \mathcal{C}(x, A)$ e $\mathcal{C}(x, B) \subset \mathcal{C}(x, A)$. $\square$

Prova do lema 7.1.4. Considere o conjunto $\mathcal{D}(x, D)$ formado pelos $y \in D$ tais que se A e B são abertos e disjuntos, $D \subset A \cup B$ e $\mathcal{C}(x, D) \subset A$ então $y \in A$.

O conjunto $\mathcal{D}(x, D)$ é fechado em D porque se $y \in D - \mathcal{D}(x, D)$ então existem conjuntos abertos disjuntos A e B com $\mathcal{C}(x, D) \subset A$ e $y \in B$ e $B \cap D$ é uma vizinhança y de D contida em $D - \mathcal{D}(x, D)$. Como D é fechado em F , $\mathcal{D}(x, D)$ também é fechado em F . Também é claro que a partir da definição de $\mathcal{D}(x, D)$ que $\mathcal{C}(x, D) \subset \mathcal{D}(x, D)$.

Lema 7.1.4 é logicamente equivalente à afirmação que $\mathcal{D}(x, D) \subset \mathcal{C}(x, D)$. Como $x \in \mathcal{D}(x, D) \subset D$, para provar esta afirmação mostramos que $\mathcal{D}(x, D)$ é conexo. A normalidade de F , o fato que $\mathcal{D}(x, D)$ é fechado e o lema A.1.3 mostram que para verificar esta conectividade basta assumir que R e S são conjuntos abertos disjuntos com $x \in R$ e $\mathcal{D}(x, D) \subset R \cup S$ e provar que $\mathcal{D}(x, D) \cap S = \emptyset$. Como $\mathcal{C}(x, D) \subset \mathcal{D}(x, D)$ temos que $\mathcal{C}(x, D) \subset R \cup S$ e a conectividade de $\mathcal{C}(x, D)$ and $x \in R$ implica que $\mathcal{C}(x, D) \subset R$.

Mostramos agora que $\mathcal{D}(x, D) \cap S = \emptyset$. O conjunto $K = D - (R \cup S)$ é fechado. Como D é compacto K também é compacto. Como $K \subset D - \mathcal{D}(x, D)$, se $y \in K$ então $y \in D - \mathcal{D}(x, D)$ e existem conjuntos abertos A_y e B_y tais que

$$\mathcal{C}(x, D) \subset A_y, \quad y \in B_y, \quad D \subset A_y \cup B_y, \quad \text{e} \quad A_y \cap B_y = \emptyset. \quad (7.2)$$

Os B_y cobrem K . Seja $B_{y_1}, \dots, B_{y_n}$ uma sub cobertura finita e defina $B = \bigcup_{i=1, \dots, n} B_{y_i}$ e $A = \bigcap_{i=1, \dots, n} A_{y_i}$. As equações em (7.2) levam a

$$\mathcal{C}(x, D) \subset A, \quad K \subset B, \quad D \subset A \cup B, \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset. \quad (7.3)$$

Por definição de K temos que $D \subset K \cup R \cup S$. Combinando isto com $D \subset A \cup B$ e $A \cap K \subset A \cap B = \emptyset$ obtemos

$$D \subset (B \cup (A \cap S)) \cup (A \cap R). \quad (7.4)$$

Vimos acima que $\mathcal{C}(x, D) \subset R$ e (7.3) mostra que $\mathcal{C}(x, D) \subset A$. Portanto, $\mathcal{C}(x, D) \subset A \cap R$. Esta identidade combinada com a partição aberta (7.4) e a definição de $\mathcal{D}(x, D)$ implicam que $\mathcal{D}(x, D) \subset A \cap R$. Como $R \cap S = \emptyset$ concluímos que $\mathcal{D}(x, D) \cap S = \emptyset$ e esta prova está completa. $\square$

Prova do lema 7.1.5. O conjunto $B = (F - A - C) \cap \overline{f_c^{\min}}$ é fechado e compacto. Usando a identidade $f_{\leq c} = f_c^{\min} \cup \overline{f_{< c}}$ o leitor pode verificar que $\overline{f_c^{\min}} = (A \cap \overline{f_c^{\min}}) \cup D$ para $D = B \cup (C \cap f_c^{\min}) \subset f_c^{\min}$ e $\mathcal{C}(x, f_c^{\min}) \subset D$. Além disso, $D = \overline{f_c^{\min}} - A$ é fechado e segue do lema 7.1.3 que $\mathcal{C}(x, D) = \mathcal{C}(x, f_c^{\min}) \subset C$. Portanto, se $y \in B$ então $y \notin \mathcal{C}(x, D)$ e o lema 7.1.4 fornece conjuntos abertos disjuntos $U_y \supset \mathcal{C}(x, D)$ and $V_y \ni y$ tais que $D \subset U_y \cup V_y$. Os conjuntos abertos $\{V_y, y \in B\}$ cobrem o compacto B . Seja $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ uma sub cobertura finita. Os conjuntos

$$U = \bigcap_{i=1, \dots, n} U_{y_i} \quad \text{e} \quad V = \bigcup_{i=1, \dots, n} V_{y_i}$$

são abertos e disjuntos, $D \subset U \cup V$, $\mathcal{C}(x, D) \subset U$ e $B \subset V$. Para completar esta prova mostramos que os conjuntos abertos $G = A \cup V$ and $H = U \cap C$ são disjuntos, $G \cap f_{\leq c} \neq \emptyset$ e $H \cap f_{\leq c} \neq \emptyset$ ed $f_{\leq c} \subset G \cup H$. De fato, $G \cap f_{\leq c} \neq \emptyset$ pois $f_{< c} \subset G$ e $f_{< c} \neq \emptyset$ já que $c > \inf_{x \in F} f(x)$. A interseção $H \cap f_{\leq c}$ é não vazia pois $\mathcal{C}(x, D) \subset H$. O conjunto $G \cap H$ é vazio porque $A \cap C = \emptyset$, $V \cap U = \emptyset$ e

$$G \cap H = (A \cup V) \cap (U \cap C) = (A \cap C \cap U) \cup (V \cap U \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Finalmente, $f_{\leq c} \subset A \cup B \cup (C \cap f_c^{\min}) = A \cup D$, $B \subset V$ e $D \subset U \cup V$ e (i) Se $x \in A$ então $x \in G$, (ii) Se $x \in B$ então $x \in V$ e $x \in G$ e (iii) Se $x \in C \cap f_c^{\min}$ então $x \in D \subset U \cup V$. Se $x \in V$ então $x \in G$. Se $x \notin V$ então $x \in U \cap C = H$. Os itens (i),(ii) e (iii) mostram que $f_{\leq c} \subset G \cup H$ e terminamos . $\square$

Apêndice A

Topologia

Topologia é uma ferramenta básica em programação não linear. Compacticidade por exemplo é um conceito fundamental, que baseia muitos resultados nesta área. Porém, em geral os conceitos topológicos são usados de modo intuitivo, como uma ferramenta auxiliar e não o foco da pesquisa. Esta é uma atitude correta, pois muito do que se discute em trabalhos especializados de topologia são filigranas de pouca relevância em programação não linear. Porém, alguns poucos pontos de topologia geral são sim de interesse para esta tese.

Este capítulo tem duas seções nas quais discutimos, respectivamente, Normalidade e a Propriedade de Hausdorff. Normalidade está no centro desta tese. Ela é usado em vários dos nossos resultados e é a condição mínima sob a qual conseguimos operar. A propriedade de Hausdorff não é necessária em nossa discussão, porém ela é implicitamente aceita e alguns pesquisadores em programação não linear podem ficar até assustados na sua ausência. Por isso, na seção A.2 apresentamos alguns resultados que continuam válidos sem a propriedades de Hausdorff e inconvenientes que ocorrem na sua ausência (como conjuntos compactos que não são fechados).

A.1 Espaços Topológicos Normais

Nesta seção apresentamos resultados que são válidos em espaços topológicos normais, mesmo que estes não satisfaçam a propriedade de Hausdorff.

Lema A.1.1 *Seja F um espaço topológico, A um subconjunto de F e $\overline{A}$ o seu fecho. O ponto x pertence a $\overline{A}$ se e somente se todo aberto B contendo x toca A e A é fechado se e somente se $A = \overline{A}$.* $\square$

Lema A.1.2 *Seja X um espaço topológico e G um grupo que age continuamente em X . Se H é um subgrupo de G e $X/\overline{H}$ é normal então X/H é normal.* $\square$

Lema A.1.3 *Seja F um espaço topológico normal. Se $C \subset F$ é fechado então C é desconexo se somente se existem conjuntos abertos B_1 e B_2 tais que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $C \subset B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap C \neq \emptyset$ e $B_2 \cap C \neq \emptyset$.* $\square$

Lema A.1.4 *A compactificação de Alexandroff de um espaço normal e localmente compacto é normal.* $\square$

Lema A.1.5 *Seja F um espaço topológico normal. Se os subconjuntos fechados A_1 e A_2 de F são disjuntos então existem conjuntos abertos C_1 e C_2 tais que $A_1 \subset C_1$, $A_2 \subset C_2$ e $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} = \emptyset$.* $\square$

A.2 A propriedade de Hausdorff

A propriedade de separação de Hausdorff, formalmente descrita na definição ??, é freqüentemente assumida e há até mesmo quem a considere parte da definição de espaço topológico. A maior dificuldade em trabalhar em espaços que não são Hausdorff é que a nossa intuição (ou pelo menos a do autor) assume inconscientemente a propriedade de Hausdorff. Considere por exemplo o seguinte lema

Lema A.2.1 *Se um espaço topológico é Hausdorff então os conjuntos unitários (pontos) são fechados. Em espaços topológicos que não são Hausdorff isso pode não ser válido.* $\square$

A possibilidade de haver pontos não fechados implica que conjuntos compactos também podem ser não fechados (conjuntos finitos são sempre compactos). A propriedade de Hausdorff cura esta patologia:

Lema A.2.2 *Os subconjuntos compactos de um espaço topológico de Hausdorff são fechados.* $\square$

Espaços não Hausdorff podem apresentar ainda outras patologias, como a não unicidade do limite de seqüências. Porém, tais espaços são interessantes pois eles aparecem quanto tomamos quocientes de espaços mais naturais, como ilustrado no início do capítulo 6. O próximo lema ilustra este fato:

Lema A.2.3 *Se X é um espaço de Banach e S é um subespaço de X então o quociente X/S é normal. Este quociente é Hausdorff se e somente se S é fechado.* $\square$

Muitas vezes a propriedade de Hausdorff é necessária, como neste lema:

Lema A.2.4 *Seja F um espaço topológico localmente compacto. A compactificação de Alexandroff de F é Hausdorff se e somente se F é Hausdorff.* $\square$

Porém as vezes ela é exigida sem necessidade. Por exemplo, nas primeiras páginas de [Struwe \(2000\)](#) é enunciado o seguinte resultado:

Lema A.2.5 *Seja F um espaço topológico compacto (e Hausdorff). Se a função $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ é semi contínua inferiormente então existe $x \in F$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo $y \in F$.* $\square$

Na verdade, a hipótese de Hausdorff não é necessária para provar o lema A.2.5, conforme explicamos na seção A.3. Ela também não é necessária para provar os seguintes lemas:

Lema A.2.6 *Seja F um espaço topológico e $C \subset F$ um subconjunto compacto. Se $A \subset F$ é fechado então $A \cap C$ é compacto.* $\square$

Lema A.2.7 *Seja X um espaço topológico e Y um conjunto compacto. Se $\psi : X \times Y \rightarrow X$ é contínua e $A \subset X$ é aberto então $B = \{x \in X \text{ com } \psi(x, y) \in A \text{ para todo } y \in Y\}$ é aberto.* $\square$

A.3 Provas do apêndice

Prova do lema A.1.1. Mostrar que $x \in \bar{A}$ se e somente se todo aberto $C \ni x$ toca A é um exercício simples de teoria dos conjuntos e lógica booleana básicas:

$$\begin{aligned}
 x \in \bar{A} &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{B \supset A, B \text{ fechado}} B \Leftrightarrow x \notin \left(\bigcap_{B \supset A, B \text{ fechado}} B \right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{B \supset A, B \text{ fechado}} B^c \\
 &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{A \cap B^c = \emptyset, B^c \text{ aberto}} B^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{A \cap C = \emptyset, C \text{ aberto}} C \Leftrightarrow \nexists \text{ aberto } C \text{ com } x \in C \text{ e } A \cap C = \emptyset. \\
 &\Leftrightarrow ((C \text{ aberto e } x \in C) \Rightarrow (A \cap C \neq \emptyset)).
 \end{aligned}$$

(Na última equivalência usamos que $((p \& q) \Rightarrow !r) \Leftrightarrow (! (p \& q) | !r) \Leftrightarrow ! (p \& q \& r)$.)

Como $A \subset \bar{A}$, para mostrarmos que A é fechado se e somente se $A = \bar{A}$ basta mostrar que A é fechado se e somente se $\bar{A} \subset A$. Por um lado, é claro que se A é fechado então $\bar{A} = \bigcap_{B \supset A, B \text{ fechado}} B \subset A$. Por outro lado se $\bar{A} \subset A$ e $x \notin A$ então $x \notin \bar{A}$ e pela primeira parte deste lema existe um aberto C_x tal que $x \in C_x$ e $C_x \cap A = \emptyset$. Logo $C_x \subset A^c$ e isto implica que

$$A^c = \bigcup_{x \in A^c} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A^c} C_x \subset A^c.$$

Portanto, $A^c = \bigcup_{x \in A^c} C_x$ é aberto e A é fechado. $\square$

Prova do lema A.1.2. Denotarei a ação de $g \in G$ sobre o elemento $x \in X$ por gx . Seja $\pi : X \rightarrow X/H$ a projeção de X sobre H . Note que π é aberta pois se $A \subset X$ é aberto então $g(A)$ é aberto para todo $g \in G$, pois g é um homeomorfismo, e $\pi(A)$ é aberto porque

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A)$$

é aberto.

Tome então conjuntos fechados disjuntos Q_1 e Q_2 de X/H . Pela continuidade de π , os conjuntos $C_1 = \pi^{-1}(Q_1)$ e $C_2 = \pi^{-1}(Q_2)$ são fechados. Eles também são disjuntos porque $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Afirmamos que, para $i = 1, 2$,

$$(x \in C_i \text{ e } \bar{h} \in \bar{H}) \Rightarrow \bar{h}x \in C_i. \quad (\text{A.1})$$

Para provarmos esta afirmação devemos mostrar que $\pi(\bar{h}x) \in Q_i = \bar{Q}_i$. Ou seja, basta mostrarmos que todo conjunto aberto A de X/H contendo $\bar{h}x$ toca Q_i (veja o lema A.1.1.). De fato, como A é aberto $\pi^{-1}(A)$ é uma vizinhança de $\bar{h}x$ e como $\bar{h} \in \bar{H}$ existe $h \in H$ tal que $hx \in A$. Segue então que $\pi(hx) \in \pi^{-1}(A) \cap Q_i$ e concluímos a verificação de (A.1).

Considere agora o quociente $X/\bar{H}$, com a projeção correspondente $\bar{\pi}$. Por hipótese $X/\bar{H}$ é normal. Os conjuntos $\bar{\pi}(C_i) \subset X/\bar{H}$ são fechados e disjuntos porque (A.1) mostra que $\bar{\pi}^{-1}(\bar{\pi}(C_i)) = C_i$ e os C_i são fechados e disjuntos. A normalidade de $X/\bar{H}$ fornece conjuntos abertos disjuntos $A_1, A_2 \subset X/\bar{H}$ tais que $\bar{\pi}(C_i) \subset A_i$. Os conjuntos $B_i = \bar{\pi}^{-1}(A_i)$ são abertos e disjuntos e $C_i \subset B_i$. Os conjuntos $D_i = \pi(B_i)$ também são abertos, porque π é uma aplicação aberta. Além disso, como $B_i = \bar{\pi}^{-1}(A_i)$ e $H \subset \bar{H}$ temos que se $x \in B_i$ e $h \in H$ então $hx \in B_i$. Como consequência,

$B_i = \pi^{-1}(D_i)$ e $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ porque $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Finalmente, $Q_i \subset \pi(C_i) \subset \pi(B_i) = D_i$. Isto mostra que podemos separar Q_1 e Q_2 por conjuntos abertos e X/H é de fato normal. $\square$

Prova do lema A.1.3. É claro que se B_1 and B_2 são como na hipótese então C é desconexo. Por outro lado, se C é desconexo então existem conjuntos abertos A_1 e A_2 tais que

$$A_1 \cap A_2 \cap C = \emptyset, \quad C \subset A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap C \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A_2 \cap C \neq \emptyset.$$

Explicamos agora como construir conjuntos B_1 e B_2 como na hipótese a partir de A_1 e A_2 . Denotemos o complemento de A_i por A_i^c . Como $C \subset A_1 \cup A_2$ temos que $C \cap A_1^c \subset A_2 \cap A_1^c$. Analogamente, $C \cap A_2^c \subset A_1 \cap A_2^c$. Logo,

$$(C \cap A_1^c) \cap (C \cap A_2^c) \subset (A_2 \cap A_1^c) \cap (A_1 \cap A_2^c) = \emptyset \quad (\text{A.2})$$

e os conjuntos fechados $C \cap A_1^c$ e $C \cap A_2^c$ são disjuntos. Pela normalidade de F , existem conjuntos abertos B_1 e B_2 com

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad C \cap A_1^c \subset B_2 \quad \text{e} \quad C \cap A_2^c \subset B_1. \quad (\text{A.3})$$

A identidade $C \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$ leva a

$$\begin{aligned} C &= (C \cap (A_1 \cap A_2)) \cup (C \cap (A_1 \cap A_2)^c) = C \cap (A_1 \cap A_2)^c = C \cap (A_1^c \cup A_2^c) = \\ &= (C \cap A_1^c) \cup (C \cap A_2^c) \subset B_2 \cup B_1. \end{aligned}$$

Além disso, a equação (A.3) implica que

$$\begin{aligned} B_2 \cap C &\supset C \cap A_1^c \cap C = C \cap A_1^c \supset C \cap A_2 \cap A_1^c = \\ &= (C \cap A_2 \cap A_1^c) \cup (C \cap A_2 \cap A_1) = (C \cap A_2) \cap (A_1^c \cup A_1) = C \cap A_2. \end{aligned}$$

e

$$B_2 \cap C = B_2 \cap (A_2^c \cup A_2) \cap C = (B_2 \cap A_2^c \cap C) \cup (B_2 \cap A_2 \cap C) \subset (B_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap C) = A_2 \cap C.$$

Portanto, $B_2 \cap C = A_2 \cap C$ e, analogamente, $B_1 \cap C = A_1 \cap C$. Estas identidades e (A.3) provam o lema A.1.3. $\square$

Prova do lema A.1.4. Seja F o nosso espaço topológico. Há dois tipos de fechados em αF :

F1: Conjuntos da forma $A = B \cup \{\infty\}$, com B fechado em F .

F2: Conjuntos compactos e fechados em F .

Sejam então A_1 e A_2 subconjuntos fechados disjuntos de αF . Temos dois casos:

- Um dos A_i 's, digamos A_1 , contém ∞ (caso F1). Neste caso A_2 deve ser um compacto fechado e se chamarmos de B_1 o conjunto fechado em F tal que $A_1 = B_1 \cup \{\infty\}$ temos que $B_1 \cap A_2 = \emptyset$. Como F é normal existem conjuntos disjuntos C_1 e C_2 abertos em F tais que $B_1 \subset C_1$ e $A_2 \subset C_2$. Note que isso implica que $B_1 \subset \overline{C_2}^c$. Como A_2 é compacto e F é localmente compacto existem pontos $x_1, \dots, x_n$ em A_2 e abertos $D_1, \dots, D_n$ tais que $x_i \in D_i$ e $\overline{D_i}$ é

compacto para todo i e $A_2 \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$. O conjunto

$$E = \overline{C_2} \cap \left(\bigcup_{i=1, n} \overline{D_i} \right)$$

é fechado e está contido no compacto $\bigcup_{i=1, n} \overline{D_i}$. Segue então do lema A.2.6 que E é compacto. A definição 6.0.2 mostra então que $G = E^c \cup \{\infty\}$ é aberto em αF . Como $E \subset C_2$ temos que $G \cap C_2 = \emptyset$ e G e C_2 separam A_1 e A_2 em αF .

- Os dois A_i 's são do tipo F2. Neste caso, como F é normal e A_1 e A_2 são fechados disjuntos há abertos disjuntos B_1 e B_2 em F que separam A_1 e A_2 . Os abertos B_1 e B_2 também são abertos em αF e separam A_1 e A_2 neste espaço. $\square$

Prova do lema A.1.5. Como F é normal existem conjuntos abertos disjuntos B_1 e B_2 tais que $A_1 \subset B_1$ e $A_2 \subset B_2$. Os conjuntos A_1 e $B_1^c = F - B_1$ são fechados e disjuntos. Logo, existem conjuntos abertos disjuntos C_1 e D_1 tais que $A_1 \subset C_1$ e $B_1^c \subset D_1$. Como $C_1 \cap D_1 = \emptyset$ temos que $\overline{C_1} \cap D_1 = \emptyset$. Portanto, $\overline{C_1} \cap B_1^c = \emptyset$ e $\overline{C_1} \subset B_1$. De modo análogo, existe um conjunto aberto C_2 tal que $A_2 \subset C_2$ e $\overline{C_2} \subset B_2$. Segue que $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \subset B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e C_1 e C_2 são como exigidos na tese do lema A.1.5. $\square$

Prova do lema A.2.1. Seja F um espaço topológico e $\{x\} \subset F$ um conjunto unitário. Para todo $y \in F - \{x\}$ existe um aberto A_y tal que $x \notin A_y$. Logo $F - \{x\} = \bigcup_{y \neq x} A_y$ é aberto e $\{x\}$ é fechado. Por outro lado, se considerarmos o espaço topológico definido pelo conjunto $F = \{0, 1\}$ com a topologia dada pelos conjuntos abertos F e $\emptyset$ veremos que nem $\{0\}$ nem $\{1\}$ são conjuntos fechados. $\square$

Prova do lema A.2.2. Seja F nosso espaço topológico e $K \subset F$ um conjunto compacto. Pela propriedade de Hausdorff, dado $x \notin K$, para todo $y \in K$ existem abertos disjuntos A_y e B_y tais que $x \in A_y$ e $y \in B_y$. Como $\{B_y, y \in K\}$ é uma cobertura de K por abertos e K é compacto existem $y_1, \dots, y_n$ em K tais que $K \subset B = \bigcup_{i=1, n} B_{y_i}$. O conjunto $A = \bigcap_{i=1, n} A_{y_i}$ é aberto e $x \in A$. Além disso, $C_x \cap K \subset A \cap B = \emptyset$ e o lema A.1.1 mostra que $x \notin \overline{A}$. Como x pode ser qualquer elemento de A^c temos que $\overline{A} = A$ e A é fechado. $\square$

Prova do lema A.2.3. A página 51 de Holmes (1975) mostra que o quociente X/S é Hausdorff se somente se S é fechado. A página 70 de Conway (1990) mostra que $X/\overline{S}$ é um espaço de Banach. Portanto, $X/\overline{H}$ é normal. Para mostrar que X/S é normal considere a ação de X sobre si mesmo dada por $v.x = v + x$ e use o lema A.1.2. $\square$

Prova do lema A.2.4. Se F é Hausdorff e x_1 e x_2 são dois pontos distintos de αF então temos três possibilidades:

- Se x_1 e x_2 estão em F então como F é Hausdorff há abertos disjuntos A_1 e A_2 em F com $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$. Os conjuntos A_1 e A_2 também são abertos em αF e separam x_1 e x_2 .
- Se $x_1 \in F$ e $x_2 = \infty$ então, como F é localmente compacto, há um aberto A_1 tal que $\overline{A_1}$ é compacto e $x_1 \in A_1$. Como F é Hausdorff o lema A.2.2 mostra que $\overline{A_1}^c$ é aberto em F e assim $A_2 = \overline{A_1}^c \cup \{\infty\}$ é aberto em αF . O conjunto A_1 também é aberto em αF e A_1 e A_2 separam x_1 e x_2 .
- O caso $x_1 = \infty$ e $x_2 \in F$ é análogo ao anterior. $\square$

Prova do lema A.2.5. Como f é semi contínua inferiormente os conjuntos

$$f_{>c} = \{x \in F \text{ com } f(x) > c\}$$

são abertos. Portanto, $\{f_{>c}, c \in \mathbb{R}\}$ é uma cobertura de F por abertos. Como F é compacto existem $c_1 < \dots < c_n$ tais que $F \subset \bigcup_{i=1,n} f_{>c_i} = f_{>c_1}$. Isto implica que $\mu = \inf_{x \in F} f(x) \geq c_1$. Agora argumentamos por contradição. Se não houvesse $x^* \in F$ tal que $f(x^*) = \mu$ então $\{f_{>\mu+1/n}, n \in \mathbb{N}\}$ seria uma cobertura de F por abertos e existiria $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset f_{>\mu+1/n_1}$, o que contraria o fato de μ ser o ínfimo de $f(x)$. Portanto, deve haver x^* tal que $f(x^*) = \mu$ e esta prova está completa. $\square$

Prova do lema A.2.6. Seja $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ uma cobertura de $A \cap C$ por abertos. Como o conjunto $B_0 = A^c$ é aberto, $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \cup \{B_0\}$ é uma cobertura de C por abertos. Como C é compacto há um conjunto finito $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $C \subset B_0 \cup \bigcup_{i=1,n} B_{\lambda_i}$. Segue então que $\{B_{\lambda_i}, i = 1, \dots, n\}$ é uma sub cobertura finita de $B_0^c \cap C = A \cap C$ e $A \cap C$ é de fato compacto. $\square$

Prova do lema A.2.7. Mostraremos que o complemento de B ,

$$B^c = \{x \in X \text{ tal que } \psi(x, y) \in A^c \text{ para algum } y \in Y\},$$

é fechado. Para isto tomamos uma net $\{x_\gamma, \gamma \in \Gamma\} \subset B^c$ convergindo para $x_\infty \in X$ e mostramos que $x_\infty \in B^c$. Para todo $\gamma \in \Gamma$ existe $y_\gamma \in Y$ tal que $\psi(x_\gamma, y_\gamma) \in A^c$. Como Y é compacto $\{y_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ tem uma subnet que converge para algum $y_\infty \in Y$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\{y_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ ela mesma é esta subnet. Como ψ é contínua e A^c é fechada, $\{\psi(x_\gamma, y_\gamma), \gamma \in \Gamma\} \subset A^c$ converge para $\psi(x_\infty, y_\infty) \in A^c$. Portanto, $x_\infty \in B^c$ e terminamos. $\square$

Referências Bibliográficas

- Ambrosetti e Rabinowitz(1973)** A. Ambrosetti e P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.*, (14):349–381. Citado na pág. [5](#)
- Bartle e Graves(1952)** R. Bartle e L. Graves. Mappings between function spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (72):400–413. Citado na pág. [17](#)
- Bertsekas(2003)** D. Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena Scientific, 2º edição. Tradução Gilson Cesar Cardoso de Souza. Citado na pág. [14](#)
- Birkhoff(1917)** G. Birkhoff. Dynamical systems with two degrees of freedom. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18:199–300. Citado na pág. [3](#)
- Borwein(1986)** J. Borwein. Stability and regular points of inequality systems. *Journal of Optim. Theory and Appl.*, 48:9–52. Citado na pág. [v](#), [vii](#), [17](#), [18](#), [20](#), [22](#), [30](#)
- Borwein e Dontchev(2003)** J. Borwein e A. Dontchev. On the bartle-graves theorem. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 131(8):2553–2560. Citado na pág. [17](#), [20](#)
- Borwein e Zhu(2005)** J. Borwein e Q. Zhu. *Techniques of Variational Analysis*. Canadim Math. Soc. and Springer Verlag. Citado na pág. [3](#)
- Cominetti(1990)** R. Cominetti. Metric regularity, tangent sets and second order optimality conditions. *Applied Math. and Optim.*, 23:265–287. Citado na pág. [17](#)
- Conway(1990)** J. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Canadim Math. Soc. and Springer Verlag, 2º edição. Citado na pág. [51](#)
- Corvellec et al.(1993)** J. Corvellec, M. Degiovanni, e M. Marzocchi. Deformation properties for continuous functionals and critical point theory. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 1: 151–171. Citado na pág. [33](#), [34](#), [35](#), [37](#), [38](#), [40](#)
- Dontchev(1996)** A. Dontchev. The graves theorem revisited. *Journal of Convex Analysis*, 3(1): 45–53. Citado na pág. [17](#)
- Dontchev(2004)** A. Dontchev. A local selection theorem for metrically regular mappings. *Journal of Convex Analysis*, 11(1):81–94. Citado na pág. [17](#)
- Dugundji(1966)** J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon. Citado na pág. [2](#)
- Ekeland e Ghoussoub(2002)** I. Ekeland e N. Ghoussoub. Selected new aspects of the calculus of variations in the large. *Bull. of Am. Math. Soc.*, 39(2):207–265. Citado na pág. [3](#), [5](#), [8](#), [35](#), [37](#), [38](#)
- Ekeland e Hofer(1985)** I. Ekeland e H. Hofer. Periodic solutions with prescribed period for convex autonomous hamiltonian systems. *Inv. Math.*, 81:155–188. Citado na pág. [5](#)
- Engelking(1989)** R. Engelking. *General Topology*. Heldermann. Citado na pág. [2](#)
- Fang(1994)** G. Fang. The structure of the critical set in the general mountain pass principle. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 3(3):345–362. Citado na pág. [3](#), [5](#), [8](#)

- Ghoussoub e Preiss(1989)** N. Ghoussoub e Preiss. A general mountain pass principle for locating and classifying critical points. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 6(5):321–330. Citado na pág. [v](#), [vii](#), [3](#), [5](#), [8](#)
- Graves(1950)** L. Graves. Some mapping theorems. *Duke Math. J.*, (17):111–114. Citado na pág. [17](#)
- Gromoll e Meyer(1969)** D. Gromoll e W. Meyer. On differentiable functions with isolated critical points. *Topology*, (8):361–369. Citado na pág. [19](#)
- Hildebrandt e Graves(1927)** T. Hildebrandt e L. Graves. Implicit functions and their differentials in general analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*, 29(1):127–153. Citado na pág. [17](#)
- Hofer(1984)** H. Hofer. A note on the topological degree at a critical point of mountain pass type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (90):309–315. Citado na pág. [v](#), [vii](#), [3](#), [5](#)
- Hofer(1985)** H. Hofer. A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the mountain pass theorem. *J. London Math. Soc.*, 2(31):566–570. Citado na pág. [v](#), [vii](#), [3](#), [5](#), [6](#), [8](#)
- Holmes(1975)** R. Holmes. *Geometric Functional Analysis and its Applications*. Springer Verlag. Citado na pág. [51](#)
- Ioffe(1979)** A. Ioffe. Regular points of lipschitz functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 251:566–570. Citado na pág. [17](#)
- Ioffe e Schwartzman(1995)** A. Ioffe e E. Schwartzman. Metric critical point theory: Potential well theorem and its applications. *Milan Journal of Mathematics*, 65(1):303–320. Citado na pág. [33](#), [35](#), [37](#), [38](#)
- Katriel(1994)** G. Katriel. Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 11(2):189–209. Citado na pág. [6](#)
- Lions(1984a)** P. Lions. The concentration compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case. part 1. *Ann. Inst. H. Poincaré*, (1):109–145. Citado na pág. [36](#)
- Lions(1984b)** P. Lions. The concentration compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case. part 2. *Ann. Inst. H. Poincaré*, (1):223–283. Citado na pág. [36](#)
- Lions(1985a)** P. Lions. The concentration compactness principle in the calculus of variations. the limit case. part 1. *Rev. Mat. Iberoam.*, páginas 145–201. Citado na pág. [36](#)
- Lions(1985b)** P. Lions. The concentration compactness principle in the calculus of variations. the limit case. part 2. *Rev. Mat. Iberoam.*, páginas 45–121. Citado na pág. [36](#)
- Ljusternik(1934)** L. Ljusternik. On the conditional extrema of functionals. *Math. Sbornik*, (41):390–401. Citado na pág. [17](#), [19](#)
- Ljusternik e Schnirelmann(1929)** L. Ljusternik e L. Schnirelmann. Sur le problème de trois géodesiques fermées sur les surfaces de genre 0. *C.R. Acad. Sci. Paris*, (189):269–171. Citado na pág. [3](#)
- Ljusternik e Schnirelmann(1934)** L. Ljusternik e L. Schnirelmann. Méthodes topologiques dans les problèmes variationelles. *Acut. Sci. Industr.*, (188). Citado na pág. [3](#)
- Machado(2009)** Paulo F. Machado. Aplicações da programação não linear ao apólicamento de apólices de seguro. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. [v](#), [vii](#)

- Michael(1956a)** E. Michael. Continuous selections. i. *The Annals of Mathematics*, 63(2):361–382. Citado na pág. 17
- Michael(1956b)** E. Michael. Selected selection theorems. *The American Mathematical Monthly*, 63(4):233–238. Citado na pág. 17, 20
- Mäkeläinen et al.(1981)** T. Mäkeläinen, K. Schmidt, e G. Styan. On the existence and the uniqueness of the maximum likelihood estimate of a vector-valued parameter in fixed size samples. *The Annals of Statistics*, (9):756–767. Citado na pág. v, vii, 1, 2, 5, 16, 35
- Morse(1934)** M. Morse. The calculus of variation on the large. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, (18). Citado na pág. 3
- Orme e Ruud(2002)** C. Orme e P. Ruud. On the uniqueness of the maximum likelihood estimator. *Economic letters*, (73):209–217. Citado na pág. 1, 5, 16
- Palais e Smale(1964)** R. Palais e S. Smale. A generalized morse theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (70):165–171. Citado na pág. 15
- Páles(1997)** Z. Páles. Inverse and implicit function theorems for nonsmooth maps in banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (209):202–220. Citado na pág. 20
- Penot e Ratsimahalo(1998)** J. Penot e R. Ratsimahalo. Characterizations of metric projections in banach spaces and applications. *Abstr. Appl. Anal.*, 3(1-2):85–103. Citado na pág. 19, 30
- Pucci e Serrin(1984)** P. Pucci e J. Serrin. Extensions of the mountain pass theorem. *J. Funct. Analysis*, (59):185–210. Citado na pág. v, vii, 3, 5, 8
- Pucci e Serrin(1985)** P. Pucci e J. Serrin. A mountain pass theorem. *J. Diff. Eq.*, (60):142–149. Citado na pág. v, vii, 3, 5, 8
- Pucci e Serrin(1987)** P. Pucci e J. Serrin. The structure of the critical set in the mountain pass theorem. *T. A. M. S.*, 299(1):115–132. Citado na pág. v, vii, 3, 5, 8
- Robinson(1975)** S. Robinson. Stability theory for systems of inequalities. part i: Linear systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 12(5):754–769. Citado na pág. 17
- Rockafellar(1979)** R. Rockafellar. Clarke’s tangent cones and the boundaries of closed sets in $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear Analysis, Th., Meth. Appl.*, 3(1):145–154. Citado na pág. 17
- Shuzhong(1985)** S. Shuzhong. Ekeland’s variational principle and the mountain pass lemma. *Acta Mathematica Sinica*, 1(4):348–356. Citado na pág. 5
- Struwe(2000)** M. Struwe. *Variational Methods, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian Systems*. Springer Verlag, 3º edição. Citado na pág. 19, 36, 48
- Tao(2009)** T. Tao. Concentration compactness and the profile decomposition. <http://terrytao.wordpress.com/2008/11/05/concentration-compactness-and-the-profile-decomposition.html>, 2009. Citado na pág. 36
- Tarone e Gruenhage(1975)** R. Tarone e G. Gruenhage. A note on the uniqueness of the roots of the likelihood equations for vector valued parameters. *J. Amer. Statist. Assoc.*, (70):903–904. Citado na pág. 1
- Thomson et al.(2001)** B. Thomson, J. Bruckner, e A. Bruckner. *Real Analysis*. Prentice-Hall. Citado na pág. 8
- Tintarev(2009)** K. Tintarev. Cocompact imbeddings and structure of weakly convergent sequences. Em V. Maz’ya e V. Isakov, editors, *Sobolev Spaces in Mathematics, vol. 1*, volume 8 of *International Mathematical Series*, páginas 361–375. Springer-Verlag. Citado na pág. 36

Tintarev e Fieseler(2007) K. Tintarev e K. Fieseler. *Concentration Compactness, functional analytic grounds and applications*. Imperial College Press. Citado na pág. [36](#)

Índice Remissivo

- A Alternativa da Conectividade, 9
- Compactificação de Alexandroff, 35
- Cone Dual, 14
- Cone Tangente de Clarke, 18
- Derivada Restrita
 - Em espaços de Banach, 19
 - No $\mathbb{R}^n$, 15
- Espaço Topológico Normal
 - Definição, 2
 - Propriedades, 47
- Estritamente diferenciável, função, 17
- Hausdorff, a propriedade de
 - Definição, 2
 - Discussão, 48
- Lema da Conexão
 - Em espaços métricos completos, 34
 - No $\mathbb{R}^n$, 9
 - Versão Geral, 35, 37
- Localmente Compacto, espaço topológico, 36
- Mínimo local estrito, 2
- Mountain Pass Point, 6
- Normal, espaço topológico
 - Veja Espaço Topológico Normal, 2
- Palais Smale, a condição de
 - Diferencial, em espaços de Banach, 19
 - Diferencial, em subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, 15
 - Em espaços métricos, 33
 - Topológica, 37
- Parcialmente estritamente diferenciável, 20
- Partição, aberta e fechada, 6
- Plateau, 7
- Ponte
 - Definição, 7
 - Propriedades, 8
- Ponto de Conexão, 6
- Propriedade da Extensão, 37
- Qualificação de restrições
 - Independência linear, 15
 - Mangasarian Fromovitz, 16
 - Robinson, 17
- Regularidade Métrica, 17
- Teorema da função implícita, 21
- Terraço, 7
- Weak slope, 33