MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2021

Lista final de exercícios

1. Sejam X, Y espaços métricos e $f, g : X \to Y$ contínuas. Suponha que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$, com $\bar{E} = X$. Mostre que $f = g$.

2. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy em um espaço métrico munido da distância d.

(a) Mostre que

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n), \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

(b) Conclua que a sequência $(d(x_n, y_n))$ converge em $\mathbb{R}$.

3. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 = 1\}, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}.$$

Mostre que F e G são fechados em $\mathbb{R}^2$. Estes conjuntos são conexos?

4. Seja $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com a métrica induzida por $\mathbb{R}$. Mostre que $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

não é uniformemente contínua em X.

5. Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ satisfazendo

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Para $x \in X$ fixado considere

$$A := \{f^{(n)}(x) : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Aqui $f^{(n)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composta n-vezes). Mostre que $x \in \bar{A}$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ diferenciável tal que $f(tx) = tf(x)$ para todos $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$. Utilize a regra da cadeia para mostrar que $f \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$.

7. Sejam $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma contração e $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $f(x) = x + \Phi(x)$. Mostre que f é uma aplicação contínua, bijetora de $\mathbb{R}^N$ sobre $\mathbb{R}^N$, e com inversa contínua.

8. Seja $\phi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma sequência de contrações, $\phi_n \to \phi$ pontualmente em $\mathbb{R}^N$. Mostre que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

9. Sejam $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e $f : K \to K$ tal que $x, y \in K$, $x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$. Mostre que existe um único $a \in K$ tal que $f(a) = a$. *Sugestão*: considere a função $g(x) = |f(x) - x|$.

10. Considere

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, \operatorname{sen}\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right) & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x_1 = 0. \end{cases}$$

Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua na origem e que existem todas as derivadas direcionais de f na origem. f é diferenciável na origem?

11. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ diferenciável e suponha que exista $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(tx) = t^p f(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Mostre que

$$\langle \vec{\nabla} f(x), x \rangle = p f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

12. Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um aberto conexo e $f : U \to \mathbb{R}^M$. Suponha que existam constantes $\alpha > 1$ e $C > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, $x, y \in U$. Conclua que f é constante. *Sugestão*: mostre, primeiramente, que f é diferenciável.

13. Dado $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}^M$ diferenciável em $x_0 \in U$. Prove que se $v_k \to v$ em $\mathbb{R}^N$ e se $t_k \to 0$ em $\mathbb{R}$ ($t_k \neq 0$), então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + t_k v_k) - f(x_0)}{t_k} = f'(x_0)v.$$

14. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela regra:

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}(1/t) & \text{se } t \neq 0; \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Mostre que: (i) f é diferenciável em $\mathbb{R}$; (ii) $f'(0) = 1$; (iii) f é limitada em $]-1, 1[$; (iv) f não é injetora em qualquer intervalo aberto centrado na origem. Compare com o Teorema da Função Inversa.

15. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1. Suponha que $f'(x)$ seja inversível, $\forall x \in \Omega$. Mostre que $f(\Omega)$ é aberto em $\mathbb{R}^N$.

16. Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Mostre que $f'(x, y)$ é inversível, $\forall (x, y) \in \Omega$, e que f não é injetora em Ω. Compare com o Teorema da Função Inversa.

17. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ diferenciável na origem e suponha que $f'(0) = \lambda I$, onde $I \in L(\mathbb{R}^N)$ é a transformação identidade e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(0)| \geq \lambda |x|/2.$$

18. Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in U$, e $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e 1 não é autovalor de $f'(0)$.

1. Mostre que existe um aberto $V \subset U$, $0 \in V$, tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$;
2. Mostre que este resultado continua válido sem a hipótese de f ser de classe C^1: basta assumir f diferenciável.

Sugestão: no ítem (1) use o Teorema da Função Inversa. Para (2) estime $|x - f(x)| \geq \ldots$

19. Mostre que as equações

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0 \end{cases}$$

determinam funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ de classe C^1 em um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $(2,-1)$ satisfazendo $u(2,-1) = 2$, $v(2,-1) = 1$. Calcule as derivadas parciais de u e v no ponto $(2,-1)$.

20. Considere a equação

$$e^{2x-y} + \cos(x^2 + xy) - 2 - 2y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

O conjunto das soluções desta equação próximo de $(0,0)$ define, implicitamente, uma das variáveis como função da outra? Se sim, determine a(s) derivada(s) desta(s) função(ões) na origem.

21. Sejam $T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+M})$ injetora e $F \subset \mathbb{R}^{N+M}$ um subespaço vetorial tal que $\mathbb{R}^{N+M} = T(\mathbb{R}^N) \oplus F$. Mostre que $\dim F = M$ e que $T^\sharp : \mathbb{R}^N \oplus F \to \mathbb{R}^{N+M}$ definida por $T^\sharp(x,y) = Tx + y$ é linear e bijetora.

22. Demonstre o seguinte resultado, conhecido como a *forma local das imersões*:

Teorema. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^{N+M}$ de classe C^1. Seja $x_0 \in \Omega$ e suponha que $f'(x_0)$ seja injetora. Mostre que existem abertos $Z \subset \mathbb{R}^{N+M}$, $V \subset \Omega$ e $W \subset \mathbb{R}^M$ com $f(x_0) \in Z$, $x_0 \in V$ e $0 \in W$, e uma bijeção $g : Z \to V \times W$ de classe C^1 e com inversa também de classe C^1 tais que $g(f(x_0)) = (x_0, 0)$ e $g(f(x)) = (x, 0)$ para $x \in W$.

Sugestão: Faça $T = f'(x_0)$, tome F como no exercício 21, defina $\Phi : U \times F \to \mathbb{R}^{N+M}$ por $\Phi(x,y) = f(x) + y$ e aplique o Teorema da Função Inversa.

23. Utilize o desenvolvimento de Taylor na origem da função

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(e^x - x - \cos y)$$

para determinar o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(e^x - x - \cos y)}{x^2 + y^2}.$$

24. Analise os pontos críticos das seguintes funções:

(1) $$f(x,y) = e^{x^2 - 4y + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(2) $$g(x,y,z) = e^{x^2 - 4y + y^2} + z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$$

(3) $$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(4) $$f(x,y) = x^3y^2(6-x-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x>0, \ y>0;$$

(5) $$f(x,y) = (2x+3y)^2 + (x+y-1)^2 + (x+2y-2)^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(6) $$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(7) $$f(x,y) = \cos(x+y) + \operatorname{sen}(x+y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

25. Sejam $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -\pi \le y \le \pi\}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xe^{-x}\cos y$. Determine o valor mínimo e máximo de f.

26. Determine os valores máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$ na região $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

27. Determine os valores máximo e o mínimo da função $f(x,y,z) = x^2+xy+y^2+yz+z^2$ na esfera $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

28. Para cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ descritos pelas equações abaixo determine seus pontos mais próximos da origem:

$$x^2+y^2-z^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \cdot b \cdot c \neq 0)\,.$$

29. Analisando a restrição da função

$$g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \langle x, y \rangle,$$

à esfera $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ demonstre, pelo método do multiplicador de Lagrange, a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

30. Mostre que se $x_1, \ldots, x_N$ são números reais ≥ 0 então

$$(x_1 \cdots x_N)^{1/N} \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\,.$$

31. Se $p, q > 0$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mostre que o mínimo de

$$f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad x, y > 0$$

sujeito a $xy = 1$ é igual a 1.

32. Usando o exercício anterior mostre que se a e b são números não negativos e p e q são como acima, então

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em que condições vale a igualdade?

33. Seja P_2 o conjunto dos polinômios reais de grau ≤ 2 e defina $J : P_2 \to \mathbb{R}$ por

$$J(f) = \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Defina também Q como sendo o subconjunto dos elementos de P_2 que valem um quando $x = 1$. Mostre que J tem minimo em Q e calcule o ponto onde o minimo é assumido.