MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2021

5a. lista de exercícios

1. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pela regra

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que as derivadas parciais $\partial f/\partial x_j$, $j = 1, 2$, existem em todo ponto de $\mathbb{R}^2$ e que f não é contínua na origem.

2. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que as derivadas parciais $\partial f/\partial x_j$ existem e são *limitadas* em Ω, $j = 1, \ldots, N$. Mostre que f é contínua em Ω.

3. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em Ω. Suponha que f tenha um máximo local em $x_0 \in \Omega$. Mostre que $f'(x_0) = 0$.

5. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ diferenciável no ponto $x_0 \in \Omega$. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e defina $r : B_\delta(0) \to \mathbb{R}^M$ pela regra

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h.$$

Mostre que r é diferenciável na origem.

6. Este exercício tem duas partes:

1. Seja $A \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ injetora. Mostre que existe $c > 0$ tal que $|Ax| \geq c|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Sugestão: existem várias maneiras para se provar esta afirmação. Minha predileta é a seguinte: considere a restrição de A à esfera unitária $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$. Então ...

2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, diferenciável em 0. Assuma que $f(0) = 0$ e que $f'(0)$ seja injetora. Mostre que existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(0) \Longrightarrow |f(x)| \geq c|x|$.

7. Sejam $F \subset \mathbb{R}^M$ um subconjunto fechado e $T \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto qualquer. Suponha dada uma aplicação contínua

$$\Phi : F \times T \longrightarrow F$$

tal que, para algum $0 < \lambda < 1$, vale

$$|\Phi(x,t) - \Phi(y,t)| \leq \lambda |x - y|, \quad \forall x, y \in F,\ t \in T.$$

Mostre que existe uma aplicação contínua $\varphi : T \to F$ tal que $\Phi(\varphi(t), t) = 0$, $\forall t \in T$.