

MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2021

4a. lista de exercícios

1. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função que vale zero para $0 \leq x < 1/2$, vale um para $1/2 < x \leq 1$ e vale $1/2$ para $x = 1/2$. Determine um subconjunto U aberto em $\mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(U)$ não é aberto em $\mathbb{R}$.

2. Mostre que se $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f pode ser estendida a uma função contínua em $[0, 1]$.

3. Sejam X, Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função entre X e Y . Dizemos que f é *própria* se $f^{-1}(K)$ é compacto em X , qualquer que seja o compacto K de Y . Mostre as seguintes propriedades:

- Se X é compacto e se $f : X \rightarrow Y$ é contínua então f é própria;
- Se Y é compacto e se $f : X \rightarrow Y$ é própria então f é contínua;
- Dada $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ escrevemos $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ se para todo $R > 0$ existir $\rho > 0$ tal que se $x \in \mathbb{R}^N$ e se $|x| > \rho$ então $|f(x)| > R$. Mostre que se f é própria então $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ e também que, se f for contínua, a recíproca é verdadeira.

4. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $f(B)$ é limitado em $\mathbb{R}^M$, qualquer que seja $B \subset \mathbb{R}^N$ limitado;
- O conjunto

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : x \in \mathbb{R}^N\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$.

Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^N$.

5. Seja X um conjunto não-vazio. Uma sequência de funções $\{f_n\}$, com $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é *uniformemente limitada* se existir $C > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq C$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que uma sequência de funções limitadas que converge uniformemente é uniformemente limitada.

b) Sejam $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sequências de funções que convergem uniformemente. Mostre que $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente. Mostre, ainda, que se f_n e g_n são limitadas para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente.

6. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

converge uniformemente em qualquer intervalo limitado, mas não converge absolutamente para qualquer valor de x .

7. Defina $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Mostre que $\{f_n\}$ converge uniformemente para uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e que a relação

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

é válida para $x \neq 0$, mas falsa para $x = 0$.

8. Sejam X um espaço métrico, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas, $f_n \xrightarrow{u} f$, e $\{x_n\}$ uma sequência em X , $x_n \xrightarrow{X} x$. Mostre que $f_n(x_n) \xrightarrow{X} f(x)$.

9. Defina $A \in L(\mathbb{R}^2)$ pela regra $A(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$. Mostre que $\|A\| = 2$.

10. Sejam X um espaço métrico e $a_{ij} : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. Para cada $x \in X$ defina $T(x) \in L(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ de tal forma que $\{a_{ij}(x)\}$ seja a matriz de $T(x)$ com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ respectivamente. Mostre que a aplicação $x \mapsto T(x)$ é contínua de X em $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$.