MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2021

3a. lista de exercícios

1. Considere o espaço métrico $\mathbb{Q}$ com a métrica induzida por $\mathbb{R}$. Mostre que se $E \subset \mathbb{Q}$ contém pelo menos dois pontos então E é desconexo.

2. Dada uma sequência $\{x_n\}$ limitada em um espaço métrico X defina $E_m = \{x_n : n \geq m\}$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se,

$$\lim_{m\to\infty} \delta(E_m) = 0\,.$$

3. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências de Cauchy em um espaço métrico munido da distância d. Mostre que a sequência $\{d(x_n, y_n)\}$ converge em $\mathbb{R}$.

4. Seja $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de subconjuntos não-vazios, fechados e limitados em um espaço métrico completo X, com $F_n \supset F_{n+1}$ para todo n. Mostre que se $\delta(F_n) \to 0$, então $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ é um conjunto com um único elemento.

5. Seja X um espaço munido da métrica discreta. Caracterize as sequências de Cauchy e as sequências convergentes em X. Conclua que X é um espaço métrico completo.

6. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais, $x_n \to x$. Defina

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Mostre que $y_n \to x$.

7. Sejam X, Y espaços métricos e $f : X \to Y$ contínua. Mostre que se $E \subset X$ então $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$. Mostre, por um exemplo, que a inclusão pode ser própria.

8. Sejam X, Y espaços métricos e $f, g : X \to Y$ contínuas. Suponha que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$, com $\bar{E} = X$. Mostre que $f = g$.

9. Sejam X um espaço métrico, com métrica d, e $A \subset X$. Considere a função $x \mapsto d(x, A)$. Mostre que esta função é uniformemente contínua, mostrando que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \qquad x, y \in X.$$

10. Sejam A e B subconjuntos fechados e disjuntos de um espaço métrico X. Mostre que existe $f : X \to [0, 1]$ contínua tal que $f^{-1}(\{0\}) = A$ e $f^{-1}(\{1\}) = B$. *Sugestão*: defina f a partir das funções $d(\cdot, A)$ e $d(\cdot, B)$.

11. Sejam $F, K \subset \mathbb{R}^N$, F fechado e K compacto. Mostre que

$$F + K \doteq \{x + y,\, x \in F,\, y \in K\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^N$. Mostre, também, que $F + K$ é compacto se ambos F e K o forem.