MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2021

2a. lista de exercícios

1. Sejam X um espaço métrico e $E \subset X$. Mostre que E' é fechado em X. Mostre também que $E' = (\overline{E})'$. É verdade que $E' = (E')'$?

2. Seja X um espaço métrico. Mostre que

- Se $A, B \subset X$ então $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Se $\{A_n\}$ é uma sequência de subconjuntos de X e se $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \overline{B}$. Mostre também, através de um exemplo, que a inclusão pode ser própria.

3. Seja $A \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado superiormente. Mostre que $\sup A \in \overline{A}$.

4. Sejam X um espaço métrico e $S \subset X$ limitado. Mostre que $\delta(S) = \delta(\overline{S})$.

5. Sejam (X, d) um espaço métrico e $K \subset Y \subset X$. Mostre que K é compacto em (X, d) se, e somente se, K é compacto em (Y, d_Y).

6. Construa um subconjunto compacto $E \subset \mathbb{R}$ tal que E' seja infinito e enumerável.

7. Sejam (X, d) um espaço métrico, $F \subset X$ fechado e $K \subset X$ compacto, $F \cap K = \emptyset$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$ se $x \in F$, $y \in K$. Mostre, também, que a conclusão pode ser falsa para dois fechados disjuntos quaisquer.

8. Seja X um espaço métrico com métrica d. Dados $x \in X$ e $A \subset X$ defina a *distância de x ao subconjunto A* como sendo o número real

$$d(x, A) \doteq \inf\{d(x, a) : \, a \in A\}.$$

Mostre que $d(x, A) = 0$ se, e somente se, $x \in \bar{A}$. Mostre, também, que se A é compacto então existe $a_\star \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a_\star)$.

9. Sejam X um espaço métrico, com métrica d, e $A \subset X$. Mostre que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \qquad x, y \in X.$$

10. Um espaço métrico X é *separável* se X contém um subconjunto enumerável A tal que $\bar{A} = X$. Mostre que $\mathbb{R}^N$ é separável.

11. Uma coleção $\{U_i\}_{i \in I}$ de abertos de um espaço métrico X é chamada de *base para X* se vale o seguinte: *dados $G \subset X$ aberto e $x \in G$ existe $i \in I$ tal que $x \in U_i \subset G$.*

1. Mostre que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma base para X se, e somente se, dado $G \subset X$ aberto existe $J \subset I$ tal que
$$G = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

2. Mostre que se X é separável então X admite uma base enumerável. *Sugestão*: se E é enumerável e denso em X considere as bolas abertas de centro em E e raio racional.

12. Seja X um conjunto não vazio e d_1, d_2 duas métricas definidas sobre X. Dizemos que d_1 e d_2 são *equivalentes* se existem constantes $c > 0$, $C > 0$ tais que

$$c\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C\, d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Mostre que se d_1, d_2 são duas métricas definidas sobre X então (X, d_1) e (X, d_2) contém os mesmos abertos.

– – – ooo – – –