$X$ : conjunto não vazio

$\{f_n\}$ : sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$

Def. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente para $f$, e escreveremos $f_n \xrightarrow{u} f$, se:

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 = n_0(\varepsilon)$, t.q.

$$n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in X$$

$$\Updownarrow$$

$$n \geq n_0 \implies \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Critério de Cauchy para convergência uniforme: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Então $\{f_n\}$ converge uniformemente se, e só se, vale:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:
$m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in X$.

<u>Dem.</u> Suponha $f_n \xrightarrow{u} f$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.
$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$, $\forall x \in X$.
Então, se $m, n \geq n_0$ então

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)|$$
$$\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que $\{f_n\}$ satisfaça o critério de Cauchy. Então, para cada $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ é Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, esta sequência converge em $\mathbb{R}$, ie, para cada $x \in X$, existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \overset{\parallel}{f(x)}$

[note que $f_n \xrightarrow{p} f$]

Resta provar que $f_n \xrightarrow{u} f$. Seja $\varepsilon > 0$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m, n \geq n_0 \Longrightarrow$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$, $x \in X$, $m \geq n_0$ e

defina $A_n \doteq |f_m(x) - f_n(x)|$, $n \geq n_0$

Temos: 1) $A_n \in [0, \varepsilon]$. ✓

2) $A_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\doteq A}$

De fato, $f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \Longrightarrow$

$f_m(x) - f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f_m(x) - f(x) \Longrightarrow$

$|f_m(x) - f_n(x)| \xrightarrow{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)|$

pois $|\cdot|$ é uma função contínua.

Agora $[0,\varepsilon]$ é fechado em $\mathbb{R}$. Como $A_n \in [0,\varepsilon]$, $\forall n \geq n_0$ segue que $A \in [0,\varepsilon]$. Conclusão: Dado $\varepsilon > 0$, dado $m \geq n_0$, dado $x \in X$

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ie, $f_n \xrightarrow{u} f$ $\blacksquare$

---

## <u>Séries de funções e o M-teste de Weierstrass.</u>

$X$: conjunto não vazio, $f_n : X \to \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uma notação para a sequência $\{S_n\}$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente em $X$ se $\{S_n\}$ converge pontualmente

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $X$ se $\{S_n\}$ converge uniformemente.

**Teorema:** Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(X \neq \emptyset)$. Suponha que:

(i) Existam $M_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ :

$$|f_n(x)| \leq M_n \,, \quad \forall x \in X.$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

$\boxed{\text{M-teste de Weierstrass}}$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ convergem uniformente em $X$.

**Dem.** Critério de Cauchy para:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \,, \quad \tilde{S}_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$$

Queremos mostrar que $\{S_N\}$ e $\{\tilde{S}_N\}$ convergem uniformemente em $X$.

$$|S_{N+p}(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x)\right|$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{n=N+1}^{N+p} |f_n(x)|}_{} = |\tilde{S}_{N+p}(x) - \tilde{S}_N(x)|$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{N+p} M_n, \quad \forall x \in X$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ dado $\varepsilon > 0$

$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $N \geq N_0,\ p \in \mathbb{N} \implies$

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} M_n < \varepsilon \qquad \boxed{///}$$

**Teorema 1** $(X,d)$ espaço métrico, $\{f_n\}$, sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, cada uma delas contínua em $x_0 \in X$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $X$ então $f$ é contínua em $x_0$. Em particular, se cada $f_n$ é contínua em $X$ então $f$ é contínua em $X$.

**Dem.** Se $x \in V$

$$|f(x) - f(x_0)| =$$

$$|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em $X$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ t.q.

$$|f_{\tilde{n}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in X$$

Logo, substituindo $\tilde{n}$ por $n$ na desigualdade acima, obtemos

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{\tilde{n}}(x) - f_{\tilde{n}}(x_0)|$$

$\forall x \in X$. Como $f_{\tilde{n}}$ é contínua em $x_0$, existe $\delta > 0$:

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |f_{\tilde{n}}(x) - f_{\tilde{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$:

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

---

Teorema 2: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$ então $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Dem.</u> Seja $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$\forall x \in [a,b]$. Logo, se $n \geq n_0$ temos

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| =$$

$$\left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \leq$$

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon \quad \boxed{//}$$

NB: as integrais de $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$ e de $f$ existem pois todas são funções contínuas (Teorema 1)

---

Teorema 3: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\{f_n\}$ uma sequência de funções $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cada uma delas continuamente diferenciável ($C^1$)

Se $f_n \xrightarrow{p} f$ em $I$ e se $\{f_n'\}$

converge uniformemente sobre os intervalos compactos de $I$ para uma função $g: I \to \mathbb{R}$ então o mesmo é verdade para $\{f_n\}$ e $f_n' \xrightarrow{u} f'$.

$I$

$f_n : I \to \mathbb{R}$

$f_n \in C^1$

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{p} f \\ f_n' \xrightarrow{u} g \text{ sobre cada } [a,b] \subset I \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $f_n \xrightarrow{u} f$ unif sobre cada $[a\ b]$

e $g = f'$

Dem. Fixemos $[a,b] \subset I$. Vamos raciocinar neste intervalo.

Pelo teorema fundamental do Cálculo, se $x \in [a,b]$

$$\begin{array}{ccccc} f_n(x) & = & f_n(a) & + & \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\,dt \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ f(x) & = & f(a) & + & \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt \end{array}$$

usei que $f_n' \xrightarrow{u} g$ em $[a,b]$ + Teorema 2

Logo $f'$ é continuamente diferenciável $f' = g$. Resta mostrar que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$

De fato, se $x \in [a,b]$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(a) - f(a) + \int_a^x [f_n'(t) - g(t)]\,dt$$

Logo

$$\underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{} \leq |f_n(a) - f(a)| + \left| \int_a^x [f_n'(t) - g(t)]\,dt \right|$$

$$\leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt$$

$$\leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^b |f_n'(t) - g(t)|\,dt$$

$$\leqslant |f_n(a) - f(a)| + \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \| f_n'(t) - g(t) \| \times (b-a)$$

$\forall x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow$$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \| f_n(x) - f(x) \| \leqslant$$

$$\underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to \infty}} + (b-a) \underbrace{\sup_{a \leqslant x \leqslant b} | f_n'(x) - g(x) |}_{\longrightarrow 0}$$

pois $f_n' \longrightarrow g$ unif em $[a,b]$

$$\boxed{\Longrightarrow f_n \xrightarrow{u} f \text{ em } [a,b]}$$

Próxima aula:

$\{a_n\}$ limitada em $\mathbb{R}$.

Então $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}, \quad x > 0$$

define uma função infinitamente diferenciável em $]0, \infty[$

Dini.