

Teorema: $P \subset \mathbb{R}^N$, $\phi \neq P$ perfeito, ie, $P = P'$
então P é não enumerável.

Resta provar que, se $P = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$
então existe sequência de bolas abertas
 $\{B_m\} : B_1 \supset \bar{B}_2 \supset B_2 \supset \dots \supset B_m \supset \bar{B}_{m+1} \dots$

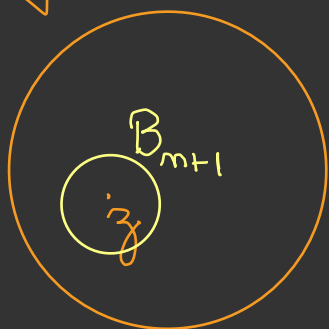
$$\begin{cases} x_1 \in B_1 \\ x_m \notin \bar{B}_{m+1} \\ B_m \cap P \neq \phi \end{cases}$$

Por indução sobre m .

Tomo B_1 como sendo qualquer bola
que contém x_1 .

Assumo que $B_1, \dots, B_m$ já foram
construídas. Existe $y \in P \cap B_m$. Como
 $P = P'$, B_m contém infinitos pontos de P .

Logo existe $z \in B_m \cap P$, $z \neq x_m$.



Tomamos $r > 0$ t.q.

$$B_r[z] \subset B_m$$

$$\text{e } x_m \notin B_r[z]$$

Definimos $B_{m+1} = B_r(z)$.

Definimos, agora, $K_m = \overline{B}_m \cap P$

• K_m é compacto compacto fechado

• $K_m \neq \emptyset \quad \forall m$

• $K_{m+1} \subset K_m$

$$\Rightarrow \exists y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m \subset P$$

Mas, fixado m , $x_m \notin \overline{B}_{m+1}$

e $\therefore x_m \notin K_{m+1}$ e $\therefore y \neq x_m$

para todo $m \in \mathbb{N}$

Conexidade

Def: Um espaço métrico (X, d) é conexo se os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados ao mesmo tempo são $\emptyset$ e X .

- X é desconexo se não for conexo
- $Y \subset X$ é conexo se (Y, d_Y) é conexo.

Logo X é desconexo se, e só se, podemos escrever $X = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1, Ω_2 são abertos, ambos não vazios e disjuntos.

Conexos em $\mathbb{R}$

Def: Um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se I satisfaz:

$\forall x, y \in I, x < y, \forall t \in \mathbb{R}, x < t < y$
então $t \in I$

Teorema: $E \subset \mathbb{R}$ é conexo $\Leftrightarrow$
 E é um intervalo.

Dem. E é desconexo $\Leftrightarrow$
 E não é um intervalo

$\Leftarrow$ Suponha que E não é um intervalo. Então existem $x_0 < t_0 < y_0$, com $x_0, y_0 \in E$, $t_0 \notin E$

Sejam $\Omega_1 = E \cap]-\infty, t_0[$

$\Omega_2 = E \cap]t_0, \infty[$

- Ω_1 e Ω_2 são abertos de E ;
- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. $\Omega_1 \neq \emptyset$ pois $x_0 \in \Omega_1$,
- $\Omega_2 \neq \emptyset$ pois $y_0 \in \Omega_2$
- $\Omega_1 \cup \Omega_2 = E$ pois $t_0 \notin E$. Logo E é desconexo.

$\Rightarrow$ Assume E desconexo. Então existem abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ com:

$$\left[\begin{array}{l} U_1 \cap E \neq \emptyset, U_2 \cap E \neq \emptyset, \\ (U_1 \cap E) \cap (U_2 \cap E) = \emptyset, \\ (U_1 \cap E) \cup (U_2 \cap E) = E \end{array} \right.$$

Tomos $x \in U_1 \cap E$, $y \in U_2 \cap E$.

Note que $x \neq y$. Assumimos $x < y$.

$$z \doteq \sup \{ t \in \mathbb{R} : x \leq t \leq y, t \in U_1 \}$$

não vazio e limitado superiormente!

$$= \sup ([x, y] \cap U_1)$$

$$x \leq z \leq y$$

1) $z \notin U_1$. De fato suponha que $z \in U_1$. Existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$]z - \varepsilon, z + \varepsilon[\subset U_1$. Como $z < y$
(pois $z = y$ implicaria $y \in U_1$)

logo existe $t \in]z, z+\varepsilon[$,
 $t < y$. Assim $t \in [x, y] \cap U_1$,
e $t > z$ $\downarrow$

2) Suponha que $z \notin U_2$. Logo
 $x < z < y$ pois $x \in U_1$ e $y \in U_2$.
Mas $z \notin E$ pois se pertencesse
esse teórema $z \in U_2$.
Logo E não é intervalo.

3) Suponha que $z \in U_2$.
Então $\exists \varepsilon > 0 :]z-\varepsilon, z+\varepsilon[\subset U_2$.
Agora, como $z = \sup([x, y] \cap U_1)$
existe $t \in U_1$, $z-\varepsilon < t \leq z$.
 $x \leq t \leq y$.

Logo $t \in U_2$ e $\therefore t \in U_1 \cap U_2$
 e portanto $t \in E$. Logo,
 também neste caso, E
 não é um intervalo $\square$

Exemplo: $E = \{0, 1\}$

$$(a) \quad U_1 =]-\infty, 1/3[, \quad U_2 =]2/3, \infty[$$

$$\sup([0, 1] \cap U_1) = \frac{1}{3} = z$$

$$\frac{1}{3} \notin U_2 \quad 0 < z < 1 \quad //$$

$$(b) \quad U_1 =]-\infty, 1[$$

$$U_2 =]2/3, \infty[$$

$$\sup([0, 1] \cap U_1) = 1 = z \in U_2$$

$(z = y)!$ Provarmos que

existe $0 < t < 1, t \notin E$

