Teorema de Heine-Borel

Se $I \subset \mathbb{R}^N$ é um "intervalo" então I é compacto.

$$I = [a^{(1)}, b^{(1)}] \times \dots \times [a^{(N)}, b^{(N)}]$$

$$x \in I \iff x = (x_1, \dots, x_N) \text{ e }$$
$$a^{(j)} \leq x_j \leq b^{(j)}, \; j = 1, \dots, N$$

Corolário de um resultado anterior

Se $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+1} \supset \dots$ são "intervalos" em $\mathbb{R}^N$ então

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset$$

Dem. $I_m = [a_m^{(1)}, b_m^{(1)}] \times \dots \times [a_m^{(N)}, b_m^{(N)}]$

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \supset [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] \supset \dots$$

para cada $j = 1, \dots N$

Pelo resultado anterior,

$$\exists\, x_j \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n^{(j)}, b_n^{(j)}]$$

$$\Longrightarrow (x_1, \ldots, x_N) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad \blacksquare$$

<u>Observação</u>: Se $I \subset \mathbb{R}^N$ é um "intervalo" como acima então

$$\delta(I) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} [b^{(j)} - a^{(j)}]^2 \right\}^{1/2}$$

De fato: $(a^{(1)}, \ldots, a^{(N)})$ e $(b^{(1)}, \ldots, b^{(N)})$ pertencem a I e $|(b^{(1)}, \ldots, b^{(N)}) - (a^{(1)}, \ldots, a^{(N)})|$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{N} [b^{(j)} - a^{(j)}]^2 \right\}^{1/2} \doteq \rho$$

Se $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ são pontos de I então

$$d(x,y) = |x-y| = \left\{ \sum_{j=1}^{N} (x_j - y_j)^2 \right\}^{1/2}$$

Como $x_j, y_j \in [a^{(j)}, b^{(j)}]$ então

$$|x_j - y_j| \leq b^{(j)} - a^{(j)}.$$ Logo

$$d(x,y) \leq \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{N} (b^{(j)} - a^{(j)})^2 \right\}^{1/2}}_{\doteq \rho}$$

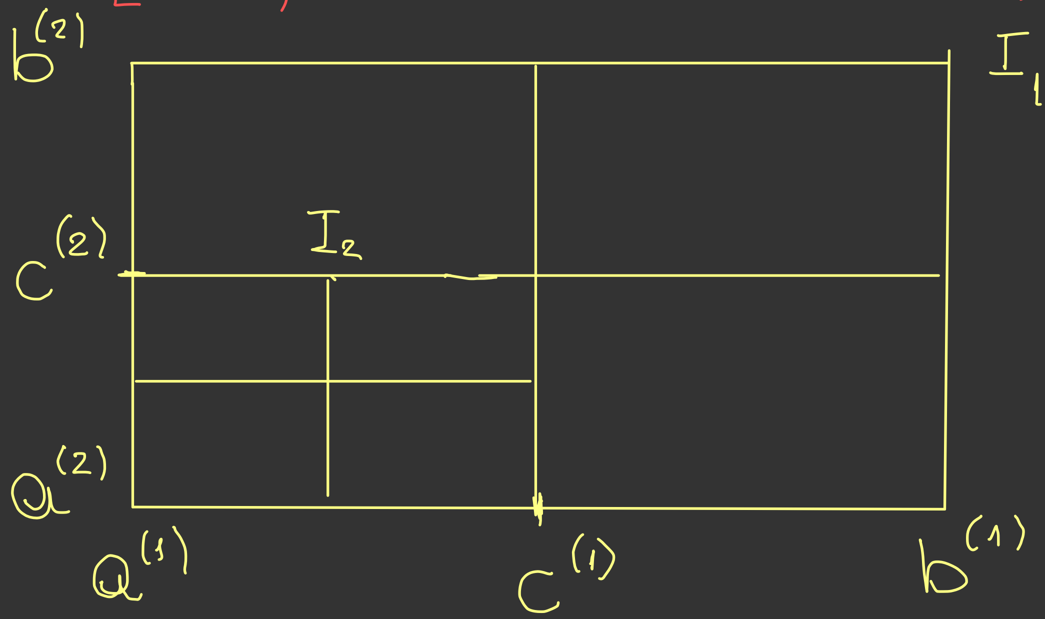
$$\Longrightarrow \overbrace{\sup \{ d(x,y) : x, y \in I \}}^{= A} \leq \rho$$

Agora $\rho \in A$ pois $(a^{(1)}, \dots, a^{(N)}), (b^{(1)}, \dots, b^{(N)}) \in I$. Assim $\sup A \geq \rho$

$\therefore \sup A = \delta(I) = \rho$ $\blacksquare$

Dem. do teorema de Heine-Borel

$I = [a^{(1)}, b^{(1)}] \times \dots \times [a^{(N)}, b^{(N)}]$



Por contradição: suponha que exista uma família de abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ que cobre I e que nenhuma subfamília finita dela cobre I

Considere os pontos $c^{(j)} = \frac{a^{(j)} + b^{(j)}}{2}$ $j = 1, \ldots, N$. Então os "intervalos" $[a^{(j)}, c^{(j)}]$ e $[c^{(j)}, b^{(j)}]$ vão determinar 2^N "subintervalos" de I.

Pelo menos um destes "subintervalos" não pode ser coberto por um número finito dos U_α. Chamaremos este "intervalo" de I_2 e o original de $I_1 (= I)$.

Note que $\delta(I_2) = \delta(I)/2$

Repetimos o processo:

Obteremos uma sequência de intervalos

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$$

satisfazendo:

(1) Cada I_n não pode ser coberto por um número de abertos da família $\{U_\alpha\}$

(2) $\delta(I_n) = \dfrac{\delta(I)}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1$

Pelo resultado anterior

$$\exists\, x_* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Como $x_* \in I$ e $I \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

existe $\alpha_* \in A$ t.q.

$$x_* \in U_{\alpha_*}$$

Como U_{α_*} é aberto existe

$\varepsilon > 0$ tal $B_\varepsilon(x_*) \subset U_{\alpha_*}$

Afirmo que existe n tal

que $I_n \subset B_\varepsilon(x_*)$

Se $x \in I_n$ então $|x - x_*| \leq \frac{\delta(I)}{2^{n-1}}$

Logo se cumpre se

$$\frac{\delta(I)}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

[$\frac{2\delta(I)}{\varepsilon} < 2^n$, ie,

$\log_2\left(\frac{2\delta(I)}{\varepsilon}\right) < n$ e

e portanto basta aplicar a propriedade arquimediana]

Mas então $I_n \subset B_\varepsilon(x_*) \subset U_{\alpha_*}$

O que é uma contradição

Mais um resultado sobre compactos em espaços métricos

<u>Proposição</u>: Sejam (X,d) um espaço métrico e $F \subset K \subset X$, onde K é compacto e F é fechado em X. Então F é compacto.

<u>Dem.</u> Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de abertos de X tal que $F \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Agora

$$K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \cup (X \setminus F) \; (= X)$$

Logo existe $B \subset A$ finito t.q.

$$K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in B} \bar{U}_\alpha\right) \cup (X \setminus F)$$

Assim

$$F = K \cap F \subset \bigcup_{\alpha \in B} \bar{U}_\alpha$$

e portanto F é compacto.

<u>Teorema</u> (Heine-Borel)

$K \subset \mathbb{R}^N$ é compacto $\Longleftrightarrow$ K é fechado em $\mathbb{R}^N$ e limitado.

$\Longrightarrow$ vale sempre, em qualquer espaço métrico

$\Longleftarrow$ Como K é limitado existe um "intervalo" I tal que $K \subset I$. De fato existe $C > 0$: $|x-y| \leq C$, $\forall x, y \in K$. Em particular

$$|x_i - y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2} \leq C$$

se $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$, para cada $i = 1, \ldots, N$. $(x, y \in K)$

Fixemos $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N) \in K$

Então, se $x \in K$

$$x_i \in [\bar{x}_i - C, \bar{x}_i + C]$$

$\forall i = 1, \ldots, N$. Logo

$$x \in [\bar{x}_1 - C, \bar{x}_1 + C] \times \ldots$$
$$\times [\bar{x}_N - C, \bar{x}_N + C]$$
$$(\doteq I)$$

ie, $K \subset I$. Assim

$$K \subset I$$

fechado em $\mathbb{R}^N$ ↙ compacto

$\Rightarrow$ <u>K é compacto.</u>

<u>Exemplos</u>: $B_r[x_0] = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq r\}$ são compactos em $\mathbb{R}^N$

Definição: (X,d) espaço métrico

Um subconjunto $P \subset X$ é perfeito se $P = P'$.

Teorema: Se $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^N$ é perfeito então P é não enumerável.

Exemplo $P = [0,1] \subset \mathbb{R}$ é perfeito e $\therefore$ não enumerável

Demonstração Suponhamos P enumerável, $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Vamos construir uma sequência de bolas abertas $\{B_n\}$

$$\overline{B}_1 \supseteq B_1 \supseteq \overline{B}_2 \supseteq \ldots \supseteq \overline{B}_n \supset B_n \supset \overline{B}_{n+1} \supseteq$$

t.q. $\begin{cases} x_1 \in B_1 \\ x_n \notin \overline{B}_{n+1} \\ B_n \cap P \neq \emptyset \end{cases}$

Construção da sequência na próxima aula.

Assumimos a existência de tal sequência B. Definimos

$$K_n = \overline{B}_n \cap P$$

K_n é compacto por (HB)

$$K_n \supset K_{n+1} \quad \text{e} \quad K_n \neq \emptyset, \forall n$$

$$\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

logo $\exists\ y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$

e $\therefore\ y \in B_n,\ \forall n$

e $\therefore\ y \neq x_n,\ \forall n.$ ✓