

(X, d) . $Y \subset X$ é compacto se vale:

• $\forall (U_i)_{i \in I}$ família de abertos em X
com $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ então $\exists J \subset I$ finito
tal que $Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Exemplos: 1) Y é finito

2) $X = \mathbb{R}$, $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

3) $Y = \emptyset$.

Exercício: Suponha $K \subset Y \subset X$.

Então K é compacto em $Y \Leftrightarrow$

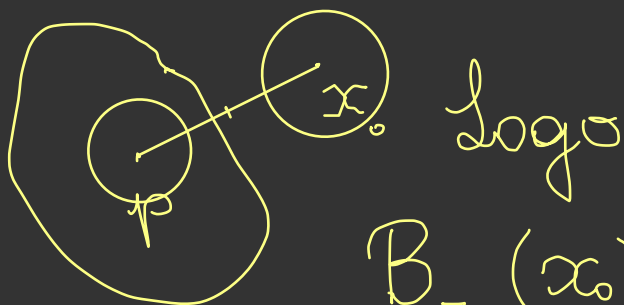
K é compacto em X .

Teorema: Se $Y \subset X$ é compacto
então Y é fechado em X .

Dem. Vamos mostrar que $X \setminus Y$
é aberto em X . Seja $x_0 \in X \setminus Y$.

Dado $p \in Y$ tomamos

$$0 < \pi_p < \frac{d(x_0, p)}{2}$$



Logo

$$B_{\pi_p}(x_0) \cap B_{\pi_p}(p) = \emptyset$$

Agora

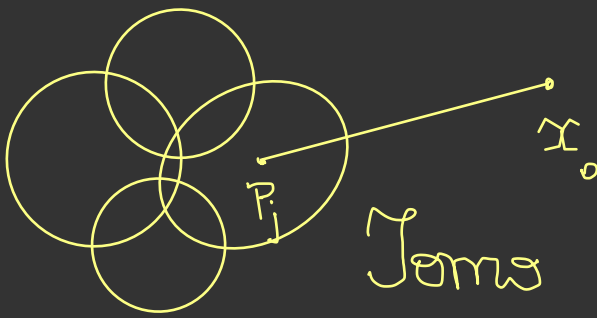
$$Y \subset \bigcup_{p \in Y} B_{\pi_p}(p)$$

aberto em X

é compacto

Logo $\exists p_1, \dots, p_k \in Y$ tais que

$$Y \subset B_{\pi_{p_1}}(p_1) \cup \dots \cup B_{\pi_{p_k}}(p_k)$$



Tomamos $\varepsilon > 0$,

$$0 < \varepsilon < r_{p_j}, \forall j=1, \dots, k$$

$$\text{Logo } B_\varepsilon(x_0) \cap B_{r_{p_j}}(p_j) = \emptyset$$

$$\forall j=1, \dots, k.$$

$$\text{Portanto } B_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus Y \quad \square$$

Def. (X, d) , $Y \subset X$. Dizemos que Y é limitado se

$$\{d(x, y) : x, y \in Y\}$$

é limitado superiormente, i.e.,
 $\exists C > 0 : d(x, y) \leq C, \forall x, y \in Y$.

$$\text{diâmetro de } Y \doteq \delta(Y) = \sup \{d(x, y) : x, y \in Y\}$$

Teorema Se Y é compacto, $Y \subset X$ então Y é limitado

Dem. Fixemos $y_0 \in Y$. Então

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(y_0)$$

De fato, dado $x_0 \in X$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > d(x_0, y_0)$, ie, $x_0 \in B_{n_0}(y_0)$

Em particular

$$Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(y_0)$$

e portanto, como Y é compacto

existe $B_{m_1}(y_0), \dots, B_{m_k}(y_0) :$
 $Y \subset B_{m_1}(y_0) \cup \dots \cup B_{m_k}(y_0)$

$$\subset B_m(y_0)$$

onde $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$

Concluindo, se $x, y \in Y$,

$$d(x, y) \leq d(x, y_0) + d(y_0, y) \\ < 2m \quad \square$$

Questão: Y compacto $\Rightarrow \begin{cases} Y \text{ fechado} \\ Y \text{ limitado} \end{cases}$
Infelizmente a recíproca
não é válida.

De fato: seja X um conjunto

infinito munido da métrica discreta.

X é fechado, X é limitado

$\delta(X) = 1$. Agora X não é compacto

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

$B_1(x)$ (aberto em X)

Como X é

infinito não é possível

tomar um número finito dos abertos $\{\{x\}\}_{x \in X}$

cujas uniões seja igual a x .

Teorema: Sejam (X, d) um espaço métrico e $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de compactos de X . Suponha que, $\forall B \subset A$ finito, $B \neq \emptyset$, $\bigcap_{\alpha \in B} K_\alpha \neq \emptyset$. Então

$$\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset.$$

Dem. Suponha que não, i.e., suponha que $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha = \emptyset$.

Assim $X = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha =$

$$= \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{[X \setminus K_\alpha]}_{\text{abertos}}$$

Tomemos K_{α_0} , para $\alpha_0 \in A$.

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} [X \setminus K_\alpha]$$



compacto

abertos em X

Logo, $\exists B \subset A$ finito t.q.

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in B} [X \setminus K_\alpha]$$

Assim

$$K_{\alpha_0} \cap \left[X \setminus \bigcup_{\alpha \in B} (X \setminus K_\alpha) \right] = \emptyset$$

$$K_{\alpha_0} \cap \bigcap_{\alpha \in B} K_\alpha = \emptyset \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

Corolário: (X, d) espaço métrico, $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sequência de compactos de X :

$$1) K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_m \supset K_{m+1} \supset \dots$$

$$2) K_m \neq \emptyset, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Então } \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m \neq \emptyset$$

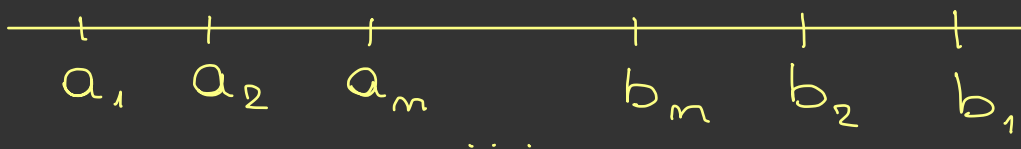
Teorema de Heine-Borel

- Um "intervalo"; nesta seção, é um conjunto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, com $a < b$ ▽

Teorema: Seja $\{I_m\}$ uma sequência de "intervalos", com $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+1} \supset \dots$

Então $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m \neq \emptyset$.

Dem. Escrevemos $I_m = [a_m, b_m]$



Seja $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$

A é limitado superiormente

De fato, $\forall k$, b_k é limitante superior de A .

Se $\alpha = \sup A$ então $\begin{cases} a_m \leq \alpha \\ \alpha \leq b_m \end{cases}$

$\forall m$, e portanto $\alpha \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m$ 

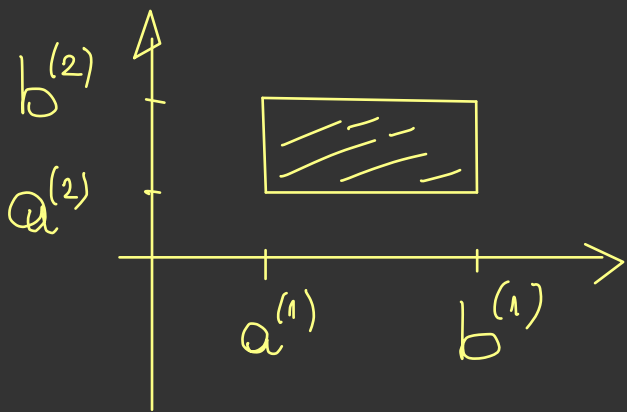
"Intervalos em $\mathbb{R}^N$ "

$$I = [a^{(1)}, b^{(1)}] \times \dots \times [a^{(N)}, b^{(N)}]$$

onde $a^{(j)} < b^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$.

$$I = \{x \in \mathbb{R}^N : x = (x_1, \dots, x_N), \\ a^{(j)} \leq x_j \leq b^{(j)}, j = 1, \dots, N\}$$

• $N=2$ I é um retângulo



Teorema de Heine-Borel

Todo "intervalo" em $\mathbb{R}^N$ é compacto.