

(X, d) : espaço métrico

$E \subset X$; fecho de E :

$$\mathcal{F} = \{ F \subset X : F \text{ fechado em } X, F \supset E \}$$

$$X \in \mathcal{F} \quad (\because \mathcal{F} \neq \emptyset)$$

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \overline{E} \supset F$$

$F \in \mathcal{F}$

Proposição: $\overline{E} = E \cup E'$.

Dem. a) $E \cup E'$ é fechado em X .

Vamos mostrar que $X \setminus (E \cup E')$ é aberto em X . Note que

$$X \setminus (E \cup E') = (X \setminus E) \cap (X \setminus E')$$

Seja $x_0 \in (X \setminus E) \cap (X \setminus E')$.

Existe $\delta > 0$: $\overset{\bullet}{B}_\delta(x_0) \cap E = \emptyset$

Mas $x_0 \notin E$, o que implica

$$B_\delta(x_0) \cap E = \emptyset$$

Resta verificar que $B_\delta(x_0) \cap E' = \emptyset$

Suponha que não, ie, que exista $x_1 \in B_\delta(x_0) \cap E'$.



Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_1) \subset B_\delta(x_0)$

Como $x_1 \in E'$, existe $x_2 \in E$, $x_2 \in B_\epsilon(x_1) \subset B_\delta(x_0) \nexists$

(b) Logo $E \cup E' \in \mathcal{F}$. Agora, seja $F \in \mathcal{F}$, ie, F é fechado em X e $E \subset F$. Então

$E' \subset F'$ e $\therefore E \cup E' \subset F \cup F' = F$ pois F é fechado em X

Concluirmos, então, que

$$E \cup E' = \overline{E} \quad \square$$

NB: E é fechado em $X \iff$

$$E = \overline{E}$$

$\iff$ (se $x \in X$ é tal que

$\forall \delta > 0, B_\delta(x) \cap E \neq \emptyset$ então
 $x \in E$)

Subespaços

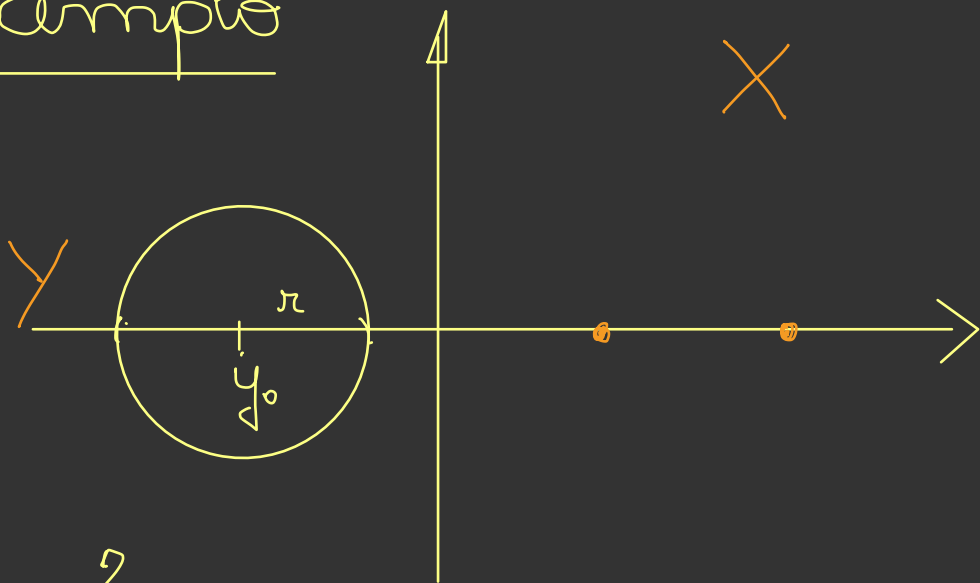
Se (X, d) é um espaço métrico
e se $Y \subset X$ é não vazio pode-
mos considerar o espaço
métrico (Y, d_Y) , onde
 $d_Y = d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$

Se $y_0 \in Y$ e se $r > 0$

$$B_r^Y(y_0) = \{y \in Y : d_Y(y, y_0) < r\}$$

$$= B_r(y_0) \cap Y.$$

Exemplo



$X = \mathbb{R}^2$ com a métrica usual

$$Y = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

Proposições: Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$ não vazio. Então

(1) Se $U \subset Y$ então

U é aberto em $Y \iff \exists V \subset X$
aberto em X t.q. $V \cap Y = U$

(2) Se $E \subset Y$ então

E é fechado em $Y \iff$
 $\exists F \subset X$ fechado em X t.q.
 $F \cap Y = E$.

Exemplo $X = \mathbb{R}$, $Y =]0, 1]$



$$]1/2, 1] = Y \cap]1/2, 2[$$

$]0, 1/2]$ é fechado em Y

$$]0, 1/2] = Y \cap [-1, 1/2]$$

Demonstração (a)

$\Leftarrow$ Suponha que $V \subset X$ é aberto em X . Queremos mostrar que $V \cap Y$ é aberto em Y . Seja $y_0 \in V \cap Y$. Em particular $y_0 \in V$ e portanto existe $r > 0$:

$$B_r(y_0) \subset V$$

Logo $\underbrace{Y \cap B_r(y_0)}_{B_r^Y(y_0)} \subset Y \cap V$

e portanto $Y \cap V$ é aberto em Y .

$\Rightarrow$ Seja $U \subset Y$ aberto em Y .

Dado $y \in U$ existe $r = r(y) > 0$:

$$B_{r(y)}^Y(y) \subset U$$

$$\text{Então } \bigcup_{y \in U} B_{r(y)}^Y(y) = U$$

$$\text{Considere } V = \bigcup_{y \in U} \underbrace{B_{r(y)}^Y(y)}_{\text{em } X}$$

V é aberto em X

$$\text{e } V \cap Y = \bigcup_{y \in U} (B_{r(y)}^Y(y) \cap Y)$$

$$= \bigcup_{y \in U} B_{r(y)}^Y(y)$$

$$= \bigcup \boxed{27,1}$$

(b) E é fechado em $Y \Leftrightarrow$
 $Y \setminus E$ é aberto em $Y \Leftrightarrow$

$\exists U$ aberto em X :

$$Y \setminus E = Y \cap U$$

Logo E fechado em $Y \Rightarrow$

$\exists U$ aberto em X t.q.

$$Y \setminus E = Y \cap U$$

$$\Leftrightarrow E = Y \cap \underbrace{(X \setminus U)}_{\doteq F}$$

F fechado em X .

Agora se $E = F \cap Y$
com F fechado em X então

$$Y \setminus E = Y \cap \underbrace{(X \setminus F)}$$

$\Rightarrow Y \setminus E$ é aberto de Y .
aberto em X

Compacidade:

Def. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é compacto se vale:

- Dada qualquer família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abertos em X t.q. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

existe $J \subset I$ finito tal que

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

- Dado $Y \subset X$ dizemos que Y é compacto se o espaço métrico (Y, d_Y) é compacto, ie:
 - Dada qualquer família de abertos de X , $\{U_i\}_{i \in I}$ com $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ existe $J \subset I$ finito tal que $Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i$

Exemplos: 1) X finito.

