

Pontos de acumulação (X, d) espaço métrico

$$\text{Se } x_0 \in X, r > 0 \quad \dot{B}_r(x_0) := B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \\ = \{x \in X : 0 < d(x, x_0) < r\}$$

Def. Seja $E \subset X$ e $x_0 \in X$. Dizemos que x_0 é ponto de acumulação de E se dado $\varepsilon > 0$, $\dot{B}_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \emptyset$.

E' = conjunto dos pontos de acumulação de E

Proposição: Se $x_0 \in E'$ então dado $\varepsilon > 0$, $\dot{B}_\varepsilon(x_0) \cap E$ contém infinitos pontos.

Dem. Suponha que $x_0 \in E'$ e que para algum $\varepsilon > 0$, $\dot{B}_\varepsilon(x_0) \cap E$ seja finito. Tomos $\dot{B}_\varepsilon(x_0) \cap E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Seja $r_j = d(x_j, x_0)$, $j = 1, \dots, n$. Então $r_j > 0$, $\forall j = 1, \dots, n$.



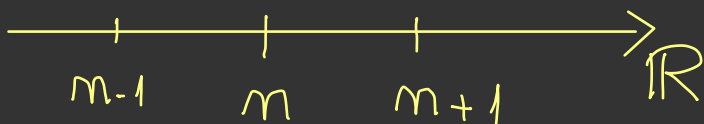
Tomos $\delta > 0$, $\delta < \pi_j$, $j=1, \dots, n$
 Então $B_\delta(x_0) \cap E = \emptyset$

Concluímos: Se $E \subset X$ é finito então
 $E' = \emptyset$.

Exemplos:

(1) $X = \mathbb{R}$, $E =]0, 1[\Rightarrow E' = [0, 1]$

(2) $X = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{Z} \Rightarrow E' = \emptyset$



(3) $X = \mathbb{R}$, $E = \{1/m : m \in \mathbb{N}\}$
 $\Rightarrow E' = \{0\}$

$0 \in E' : \forall \varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$

$0 < \frac{1}{m} < \varepsilon$.

Definições: Se $E \subset X$ e se $x_0 \in E$ dizemos que x_0 é ponto isolado de E se $x_0 \notin E'$.

Definições: (X, d) : espaço métrico, $Y \subset X$. Dizemos que Y é fechado em X se $Y' \subset Y$.

Proposições: $Y \subset X$ é fechado em X se, e somente se, $X \setminus Y$ é aberto em X .

Demonstrações: $Y \subset X$ é fechado em X

Seja $x_0 \in X \setminus Y$. Logo, em particular, $x_0 \notin Y'$ e portanto existe $\varepsilon > 0$: $\dot{B}_\varepsilon(x_0) \cap Y = \emptyset$. Isto é, $\dot{B}_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus Y$. Mas $x_0 \in X \setminus Y$ e $\therefore B_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus Y$. Assim

$X \setminus Y$ é aberto em X .

Reciprocamente, suponha $X \setminus Y$ aberto em X e que exista $x_0 \in Y'$, $x_0 \notin Y$. Então, $\forall \varepsilon > 0$

$B_\varepsilon(x_0) \cap Y \neq \emptyset$ e portanto

$B_\varepsilon(x_0) \not\subset X \setminus Y$. Mas $x_0 \in X \setminus Y$ e portanto $B_\varepsilon(x_0) \not\subset X \setminus Y, \forall \varepsilon > 0$ ↯

Teorema: Seja (X, d) um espaço métrico.

- 1) $\emptyset$ e X são fechados em X ;
- 2) Se $(F_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos fechados em X então $\bigcap_{i \in I} F_i$ é fechado em X ;
- 3) Se $F_1, \dots, F_m$ são fechados em X então $F_1 \cup \dots \cup F_m$ é fechado em X .

Demonstração : $X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$

$X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i)$

Definição : (X, d) espaço métrico,

$A \subset X$. Considere

$$\mathcal{F} := \left\{ F : F \subset X \text{ fechado em } X, \right. \\ \left. A \subset F \right\}$$

$X \in \mathcal{F}$. Logo podemos considerar

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \supset A$$

$\underbrace{F \in \mathcal{F}}_{\text{fechado em } X}$

é o menor fechado
em X que contém A

O fecho de $A \subset X$ é por definição o menor fechado que contém A ; notação: $\bar{A}$. ($A \subset \bar{A}$)

Proposição: $\bar{A} = A \cup A'$.
