(X, d) espaço métrico;

X conjunto $\neq \emptyset$; $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$; $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y \in X$

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in X$

<u>Exemplos</u>: 1) $X = \mathbb{R}^N$ com a distância euclidiana

2) $X \neq \emptyset$ qualquer

d: métrica discreta

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

3) $C([a,b]) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} ;\ f \text{ é contínua} \}$

$$d_1(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_2(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

(X,d) : espaço métrico

Dado $x_0 \in X$, dado $r > 0$, a <u>bola aberta de centro x_0 e raio</u> r é o conjunto

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

Do mesmo modo definimos a <u>bola fechada de centro x_0 e raio r</u>

$$B_r[x_0] := \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$$

<u>Exemplos</u> 1) Em $\mathbb{R}$

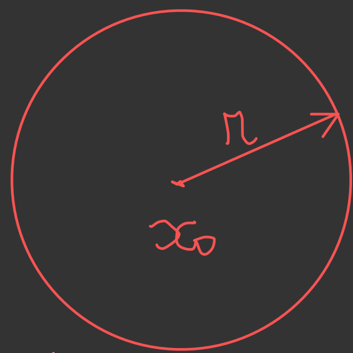
$$B_r(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[$$

$$B_r[x_0] = [x_0 - r, x_0 + r]$$

2) Em $\mathbb{R}^2$

$$B_r(x_0) =$$

$$B_r[x_0] =$$



3) X com a métrica discreta

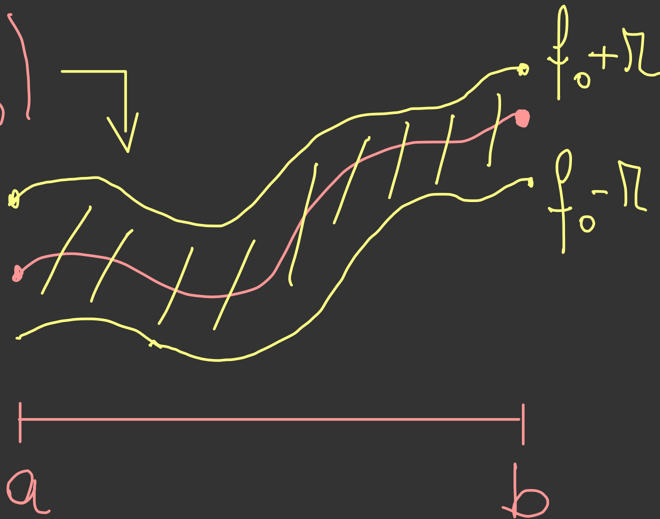
$x_0 \in X$, $r > 0$,

$$B_r(x_0) = \begin{cases} \{x_0\} & 0 < r \leq 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

$$B_r[x_0] = \begin{cases} \{x_0\} & 0 < r < 1 \\ X & r \geq 1 \end{cases}$$

4) $X = C([a,b])$, d_1.

$B_r(f_0)$



<u>Definição</u>: (X, d) espaço métrico.
Um subconjunto $Y \subset X$ é <u>aberto</u> <u>em</u> <u>X</u> se vale:

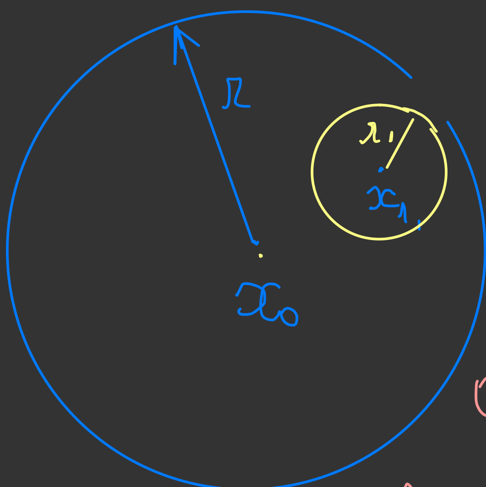
$$\boxed{\text{Dado } x_0 \in Y \text{ existe } r > 0 : B_r(x_0) \subset Y}$$

<u>Teorema</u>: Se (X, d) é um espaço métrico então toda bola aberta em X é um conjunto

aberto.

<u>Demonstração</u>: Seja $B_r(x_0)$ uma bola aberta em X. Seja $x_1 \in B_r(x_0)$. Temos que mostrar que existe $r_1 > 0$:

$$B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x_0).$$



$$d(x_0, x_1) + \underbrace{r_1}_{!} < r$$

ou

$$0 < \underline{r_1} < r - d(x_0, x_1)$$

Temos que verificar que, com esta escolha de r_1

$$\xrightarrow{\ ?\ } B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x_0)$$

Seja $x \in B_{r_1}(x_1)$. Então

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0)$$

$$< r_1 + d(x_1, x_0)$$

$$< r$$

Logo $x \in B_r(x_0)$ ▨

Observações: Se $X \neq \emptyset$ está munido da métrica discreta então todo subconjunto de X é aberto.

De fato, dado $Y \subset X$ e $x_0 \in Y$

$$B_r(x_0) = \{x_0\} \subset Y \quad \text{se } 0 < r \leq 1.$$

Teorema: Seja (X, d) um espaço

métrico. Então

1) $\emptyset, X$ são abertos em X;

2) Se $(Y_i)_{i \in I}$ é uma família qualquer de subconjuntos abertos em X então $\bigcup_{i \in I} Y_i$ é aberto em X.

3) Se $Y_1, \ldots, Y_n$ são abertos em X então $\bigcap_{j=1}^{n} Y_j$ é aberto em X.

Demonstração

1) ✓

2) Seja $x_0 \in \bigcup_{i \in I} Y_i$. Existe $i_0 \in I$ t.q. $x_0 \in Y_{i_0}$. Como

Y_{i_0} é aberto em X, existe $r>0$ t.q. $B_r(x_0) \subset Y_{i_0}$

Mas $Y_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} Y_i$ $\boxed{//}$

3) Seja $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} Y_i$. Então $x_0 \in Y_i$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Para cada i, $\exists\, r_i > 0$: $B_{r_i}(x_0) \subset Y_i$. Seja

$$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} > 0$$

Logo $B_r(x_0) \subset B_{r_i}(x_0) \subset Y_i$,

$\forall i = 1, \dots, m \Longrightarrow$

$$B_r(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{m} Y_i \quad \blacksquare$$

Obs. Em 3) é essencial que a intersecção seja finita.

Exemplo: $X = \mathbb{R}$, com a métrica usual.

$$Y_j = \left] -1/j , 1/j \right[\quad j = 1, 2, \dots$$

$$Y_j = B_{1/j}(0) \quad \text{abertos em } \mathbb{R}$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} Y_j = \{0\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{não é} \\ \text{aberto em} \\ \mathbb{R} \end{array} \right.$$