

ESPAÇOS MÉTRICOS

Espaço $\mathbb{R}^N$

$\mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{N \text{-fatores}}$ com a estrutura de $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.
 $\dim \mathbb{R}^N = N$
 $\{e_1, \dots, e_N\}$: base canônica de $\mathbb{R}^N$

$\mathbb{R}^N$: espaço euclidiano, i.e., $\mathbb{R}^N$ é munido de um produto interno (euclidiano)

Se $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x = \sum_{j=1}^N x_j e_j$,

$y = \sum_{j=1}^N y_j e_j$, definimos

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^N x_j y_j$$

Note que $e_j \cdot e_k = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, N$

Norma em $\mathbb{R}^N$

Se $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$

Valores: • $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$

$|\lambda x| = |\lambda| |x|$.

segue da desigualdade de Cauchy -

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Se } x, y \in \mathbb{R}^n \\ |x+y| \leq |x|+|y| \end{aligned}$$

$$\text{Schwarz: } |x \cdot y| \leq |x||y|$$

Definição: Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos a distância entre x e y como sendo o número real não negativo

$$d(x, y) = |x - y|.$$

$$\text{Teoremas: } \begin{cases} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \end{cases}$$

Definição: Um espaço métrico é um conjunto $X \neq \emptyset$ munido de uma função $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo os seguintes axiomas:

$$(1) d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$$

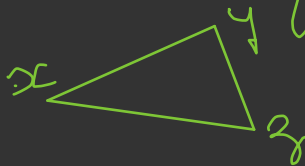
$$(2) d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(3) d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$$

(4) Desigualdade triangular:

$$\forall x, y, z \in X$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



Exemplos:

1) $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com métrica usual

2) Métrica discreta: dado qualquer conjunto X podemos definir sobre ele a seguinte métrica: se $x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

↓
é uma métrica