Exercícios: normas equivalentes

Seja $k \geq 0$ um inteiro.

$P_k(\mathbb{R})$: espaço dos polinômios de grau $\leq k$, com coeficientes reais.

$P_k(\mathbb{R})$: espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $= k+1$.

Exercícios

1) Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distintos, com $n > k$. Mostre que existem constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$:

$$C_1 \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq C_2 \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)|,$$

$\forall f \in P_k(\mathbb{R})$.

2) Mostre que dado $k \geq 0$ existem constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$:

$$C_1 \sum_{j=0}^{k} |a_j| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq C_2 \sum_{j=0}^{k} |a_j|,$$

$$\forall f = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \in P_k(\mathbb{R})$$

---

3) Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $P_k(\mathbb{R})$. Suponha que $f_n \to f$ uniformemente sobre $[0,1]$. Mostre que $f \in P_k(\mathbb{R})$ e que $f_n \to f$ em $P_k(\mathbb{R})$.

<u>Def</u>. Sejam E um espaço vetorial e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas sobre E. Dizemos

que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são <u>equivalentes</u> se existirem constantes $c_1, C_2 > 0$:

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \ \forall x \in E.$$

<u>Obs</u>: Se $x, y \in E$

$$c_1\underbrace{\|x-y\|_1}_{d_1(x,y)} \leq \underbrace{\|x-y\|_2}_{d_2(x,y)} \leq C_2\underbrace{\|x-y\|_1}_{d_1(x,y)}.$$

$\Rightarrow (E, d_1)$ e (E, d_2) tem os mesmos abertos.

<u>Teorema</u>: Se E é um espaço vetorial de <u>dimensão</u> <u>finita</u> então duas normas quaisquer sobre E são sempre equivalentes.

Demonstração: Fixemos uma base de E: $\{e_1, \dots, e_N\}$ e, a partir dela, definimos a seguinte norma: se $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j$, definimos

$$|x| = \left\{ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \right\}^{1/2}$$

Vamos provar que qualquer norma sobre E é equivalente à $|\cdot|$. De fato, se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas sobre E então existem $C_1, C_2, D_1, D_2 > 0$:

$$C_1 \|x\|_1 \leq |x| \leq C_2 \|x\|_1$$

$$D_1 \|x\|_2 \leq |x| \leq D_2 \|x\|_2 .$$

Então $C_1 \|x\|_1 \leq |x| \leq D_2 \|x\|_2$

$$\leq \frac{D_2}{D_1} |x| \leq \frac{C_2 D_2}{D_1} \|x\|_1$$

$$C_1 \|x\|_1 \leq D_2 \|x\|_2 \leq \frac{C_2 D_2}{D_1} \|x\|_1$$

$$\frac{C_1}{D_2} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{C_2 D_2}{D_1 D_2} \|x\|_1$$

Seja $\|\cdot\|$ uma norma sobre E.

Então se $x \in E$,

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{N} \|x_j e_j\|$$

$$= \sum_{j=1}^{N} |x_j| \|e_j\| \leq \sum_{j=1}^{N} |x| \|e_j\|$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} \|e_j\|\right)}_{C_2} |x|$$

$$\|x\| \leq C_2 |x|, \ \forall x \in E.$$

Note que $T: \mathbb{R}^N \longrightarrow E$

$$T(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j$$

é uniformemente contínua.

$$\|T(x_1, \dots, x_N) - T(y_1, \dots, y_N)\| \leq C_2 \cdot |(x_1, \dots, x_N) - (y_1, \dots, y_N)|.$$

<u>Lema</u>: Se $\| \ \|$ é uma norma sobre um espaço vetorial então

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in E$$

Dem. De fato,

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

Trocando $x \leftrightarrow y$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\| \quad \blacksquare$$

Pelo lema concluímos que

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(x_1, \ldots, x_N) \longmapsto \|T(x_1, \ldots, x_N)\|$$

é contínua. Note que, se

$$\left(\sum x_j^2\right)^{1/2} = 1 \text{ então}$$

$$\|T(x_1, \ldots, x_N)\| > 0 \quad \text{Por}$$

Heine-Borel, existe $c > 0$:

$$\|T(x_1,\dots,x_N)\| \geq c,$$

$$\forall (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N, \left(\sum x_j^2\right)^{1/2} = 1$$

$$\Longrightarrow \|T(x_1,\dots,x_N)\| \geq c\left(\sum x_j^2\right)^{1/2}$$

$$\forall (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N$$

Conclusão: se $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j$

$$c|x| \leq \left\|\sum_{j=1}^{N} x_j e_j\right\| = \|x\| \quad \blacksquare$$

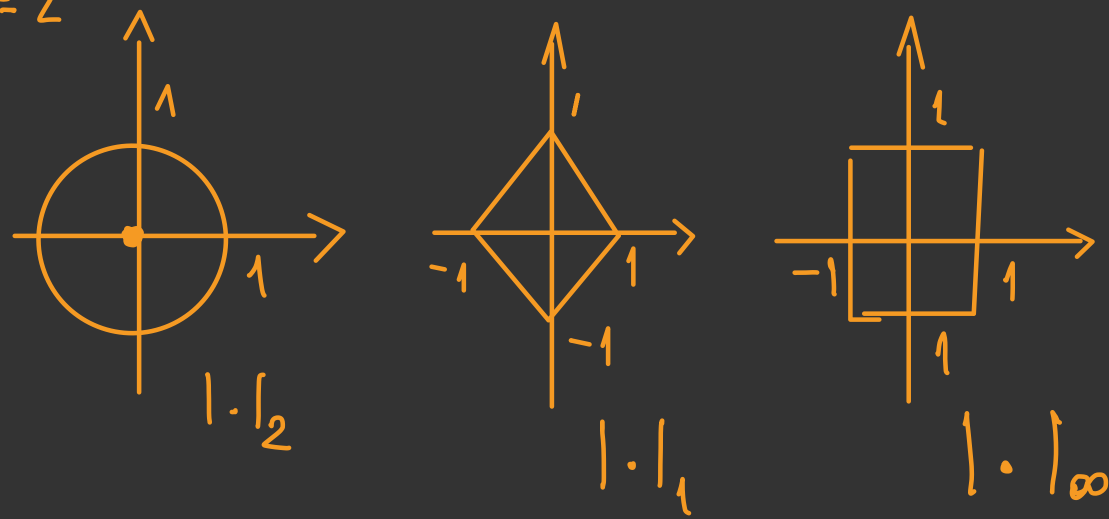
Exemplos: Em $\mathbb{R}^N$:

$$|x|_2 = \left\{\sum_{j=1}^{N} x_j^2\right\}^{1/2}$$

$$|x|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j|$$

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

$N = 2$



Em geral o resultado é falso se a dimensão não for finita

<u>Exemplo</u>:

$$E = \left\{ x = \{x_n\} : x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \{n : x_n \neq 0\} \text{ é finito} \right\}$$

E é um espaço vetorial

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

$\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ são normas sobre E

Suponha que exista $C > 0$:

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2 \quad \forall x \in E$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$$\|x_k\|_1 = k \qquad \forall k.$$

$$\|x_k\|_2 = 1$$

Logo $k \leq C \cdot 1$, $\forall k$. ↯

Solução do exercício 3

$f_n \in P_k(\mathbb{R})$, $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[0,1]$

$$\Rightarrow f \in P_k(\mathbb{R}).$$

Defina a seguinte norma em $P_k(\mathbb{R})$

$$|||f||| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{norma em } P_k(\mathbb{R})$$

$f_n \xrightarrow{u} f$ então $\{f_n\}$ satisfaz o critério de Cauchy para convergência uniforme.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in [0,1]$. Logo

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n, m \geq n_0 \Rightarrow |||f_n - f_m||| < \varepsilon$

e portanto $\{f_n\}$ é Cauchy

em $P_k(\mathbb{R})$. Logo existe

$g \in P_k(\mathbb{R})$ tal $f_n \longrightarrow g$, ie,

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |||f_n - g||| < \varepsilon$

ie, $f_n \xrightarrow{u} g$. Logo $f = g$ $\blacksquare$
