

E : $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, $\dim E < \infty$

$\|\cdot\|$: norma:

$$\|x\| \geq 0, \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \lambda \in \mathbb{R}, x \in E$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$$

$(E, \|\cdot\|)$: espaço normado.

E se torna um espaço métrico:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Fixemos uma base $\{e_1, \dots, e_N\}$:
base de E .

$$\mathbb{R}^N \xrightarrow{\lambda} E$$
$$\underbrace{(x_1, \dots, x_N)}_{=x} \mapsto \sum_{j=1}^N x_j e_j$$

$$\|\lambda(x_1, \dots, x_N)\| = \|\lambda(x)\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^N x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^N |x_j| \|e_j\|$$

$$\leq |x| \underbrace{\sum_{j=1}^N \|e_j\|}_{:=C}$$

$$\|\lambda(x)\| \leq C|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow \|\lambda(x) - \lambda(y)\| \leq C|x - y|$$

λ é unif. contínua

$$\exists M: |x| \leq M \|\lambda(x)\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

De fato, se $x \neq 0$

$$1 \leq M \frac{1}{|x|} \|\lambda(x)\|$$

$$\frac{1}{M} \leq \left\| \lambda\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\|$$

$$\text{ie, } \frac{1}{M} \leq \|\lambda(y)\|, \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

Agora, note que $|y| = 1$

$$S = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| = 1\}$$

é compacto.

Como $\|\lambda\|$ é contínua, $\exists y_0 \in S$:

$$\min_{y \in S} \|\lambda(y)\| = \|\lambda(y_0)\| \neq 0$$

Basta tomar

$$M = \frac{1}{\|\lambda(y_0)\|}$$

Logo vale

$$|x| \leq M \|\lambda(x)\|, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow |x - y| \leq M \|\lambda(x) - \lambda(y)\|$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Se $e, f \in E$

$$|\lambda^{-1}(e) - \lambda^{-1}(f)| \leq M \|e - f\|$$

e portanto λ^{-1} é também
uniformemente contínua

E : dimensão finita, normado

$$\lambda: \mathbb{R}^N \xrightarrow{\sim} E$$

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \sum_{j=1}^N x_j e_j$$

Consequência:

- 1) E é completo
- 2) $\Omega \subset E$ é aberto em E
 $\Leftrightarrow \lambda^{-1}(\Omega)$ é aberto
em $\mathbb{R}^N$
- 3) Vale Heine-Borel em E

Sejam E, F espaços normados de dimensão finita:

$\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$ normas em E e F respectivamente.

$L(E, F) := \{A: A: E \rightarrow F \text{ linear}\}$

$L(E, F)$ é normado

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\|_F : \|x\|_E \leq 1 \}$$

Tem as mesmas propriedades que estudamos antes. Por exemplo

$$L(E) = L(E, E)$$

$$GL(E) = \{A \in L(E) : A \text{ é inversível}\}$$

$GL(E)$ é aberto em $L(E)$ e

$A \rightarrow A^{-1}$, de $GL(E)$ em si mesmo,

é contínua

Noções de diferenciabilidade.

$\Omega \subset E$, aberto em E

$f: \Omega \rightarrow F$

$\left. \begin{array}{l} E, F \text{ de} \\ \text{dimensão} \\ \text{finita,} \\ \text{normados} \end{array} \right\}$

$x_0 \in \Omega$

f é diferenciável em x_0 se existe
 $A \in L(E, F)$:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h)$, onde

$\frac{r(h)}{\|h\|_E} \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$, ie,

dado $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$\|h\|_E < \delta \Rightarrow \|r(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$

$\left\{ \begin{array}{l} A = f'(x_0), \text{ etc...} \\ \text{Regra da cadeia, DVM,} \\ \text{Teor. Funções Inversa, Implícita} \end{array} \right.$

Def. $f: \Omega \subset E \rightarrow F$, E, F : como antes.
 $f \in C^1(\Omega, F)$ se f é diferenciável em cada ponto de Ω
e $f': \Omega \rightarrow L(E, F)$ é contínua

Def. $f: \Omega \subset E \rightarrow F$, E, F : como antes.
Dizemos que $f \in C^2(\Omega, F)$
se $f' \in C^1(\Omega, L(E, F))$, ie
 f' é diferenciável em Ω e

$\beta'' : \Omega \rightarrow \underbrace{L(E, L(E, F))}_?$
é contínua.

Definição: Uma função

$b : E \times E \rightarrow F$ é bilinear

$$\left[\begin{array}{l} b(x+y, z) = b(x, z) + b(y, z) \\ b(\lambda x, z) = \lambda b(x, z) \\ b(x, y+z) = b(x, y) + b(x, z) \\ b(x, \lambda z) = \lambda b(x, z) \\ \forall x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$B(E, F) = \left\{ b : b : E \times E \rightarrow F \right. \\ \left. \text{é bilinear} \right\}$$

Fato $L(E, L(E, F)) \xrightarrow{\sim} B(E, F)$

$$\frac{\psi}{T} \mapsto b_T$$

$$b_T(x, y) := (Tx)(y)$$

A inversa : $B(E, F) \rightarrow L(E, L(E, F))$

$$b \mapsto T_b$$

$$T_b(x) := b(x, \cdot), \forall x \in E$$

Voltando : $f''(x) \in B(E, F)$

Teorema de Schwarz : Se

f é de classe C^2 em Ω

então $f''(x)$ é simétrica, ie,

$$f''(x)(h, k) = f''(x)(k, h), \\ \forall h, k \in E.$$

$$f(x), f'(x): E \rightarrow F \text{ linear} \\ f \in C^2 \quad f''(x): E \times E \rightarrow F \\ \text{bilinear, simétrica}$$

Fórmula de Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \\ \frac{1}{2} f''(x_0)(h, h) + R(h)$$

$$\text{onde } \frac{R(h)}{\|h\|_E^2} \rightarrow 0 \text{ em } F$$