

Lista de exercícios - 26/11/2021

- 1) Sejam X um espaço métrico e $Y \subset X$.
Mostre que Y é conexo então $\bar{Y}$ também é conexo.
- 2) Sejam X um espaço métrico e $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de subconjuntos de X , cada um deles conexo. Mostre que se $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset$ então $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ é conexo.

Definição: Uma componente conexa de um espaço métrico é um subconjunto conexo maximal, ie, um que não está contido propriamente em algum subconjunto conexo.

- 3) Resolva os seguintes itens:

- a) Toda componente conexa de X , espaço métrico, é fechada em X .
- b) Se C_1 e C_2 são componentes conexas de X e se $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ então $C_1 = C_2$.
- c) Mostre que X se escreve como a reunião disjunta de suas componentes conexas.
- d) Defina a seguinte relação $\sim$ sobre os pontos de X :
- $$x_1 \sim x_2 \iff \exists Y \subset X \text{ conexo, com } x_1, x_2 \in Y.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência e que as classes de equivalência de $\sim$

são, precisamente, as componentes conexas de X .

e) Determine as componentes conexas de:

$$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad X = \mathbb{Q}$$

ambos com a métrica induzida por $\mathbb{R}$.

Definição: Um espaço métrico é totalmente desconexo se suas componentes conexas são os conjuntos unitários (ie, qualquer subconjunto contendo dois pontos distintos é desconexo).

f) Seja X um espaço métrico enumerável. Então X é totalmente desconexo.

Definição: Um espaço métrico X é

localmente conexo se dados $x_0 \in X$
e $n > 0$ existe $V \subset B_n(x_0)$ conexo
com $x_0 \in V^\circ$.

g) Mostre que se X é localmente
conexo então toda componente
conexa de X é um subconjunto
aberto em X .

1) Basta mostrar que:

$Y \subset X$ conexo, $\bar{Y} = X \Rightarrow X$ conexo

De fato, seja $X = A \cup B$ uma
decomposição de X com:

A, B abertos em X , $A \cap B = \emptyset$.

Temos que verificar que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

Agora $Y = \underbrace{(A \cap Y)}_{\text{aberto em } Y} \cup \underbrace{(B \cap Y)}_{\text{aberto em } Y}$.

↑
disjunta

Como Y é conexo temos

$$A \cap Y = \emptyset \quad \text{ou} \quad B \cap Y = \emptyset$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \leftarrow & \Downarrow \\ A = \emptyset & & B = \emptyset \end{array}$$

suponha que não!

$A \neq \emptyset$. Tomo $a \in A$.

$$\exists \pi > 0 : B_\pi(a) \subset A.$$

Como $a \in X$ e $\bar{Y} = X$ existe $b \in Y$, $b \in B_\pi(a)$. Logo $b \in A \cap Y$?

$$2) Y_\alpha \subset X, \alpha \in A$$

$$\exists x_0 \in Y_\alpha, \forall \alpha \in A.$$

$$\Rightarrow Y = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \text{ é conexo.}$$

Suponhamos que $Y = A \cup B$,
 A, B abertos de Y , $A \cap B = \emptyset$

Vou assumir que $x_0 \in A$.

$$\text{Temos } Y_\alpha = (A \cap Y_\alpha) \cup (B \cap Y_\alpha)$$

aberto em

Y_α

↑

disjunta

aberto em

Y_α

Como Y_α é conexo

$$\text{e } x_0 \in A \cap Y_\alpha, \forall \alpha \Rightarrow$$

$$B \cap Y_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \Rightarrow$$

$$B = \phi \Rightarrow \gamma \text{ é conexo.}$$

Sejam X espaço métrico, $x_0 \in X$

$$\mathcal{F}_{x_0} = \{C : C \subset X \text{ é conexo, } x_0 \in C\}$$

$$\mathcal{F}_{x_0} \neq \phi \text{ pois } \{x_0\} \in \mathcal{F}_{x_0}$$

$$C_{x_0} = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_{x_0}} C$$

exercício
2
↓

C_{x_0} é conexo! Agora, se

$$D \subset X \text{ é conexo, } C_{x_0} \subset D$$

então $x_0 \in D \Rightarrow D \in \mathcal{F}_{x_0}$
e portanto $D \subset C_{x_0}$.

Logo $C_{x_0} = D \Rightarrow C_{x_0}$ é
uma componente conexa de X .

Por outro lado, suponha que
 C_1 e C_2 sejam componentes
conexas de X , $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Então, pelo exercício 2,

$C_1 \cup C_2$ é conexo. Logo

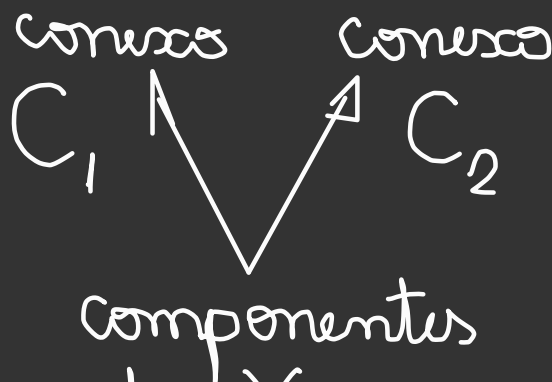
$C_1 = C_1 \cup C_2$ e $C_2 = C_1 \cup C_2$

ie, $C_1 = C_2$ $\square$

Conclusão: resolvemos b) e c).

Agora se C é uma componente conexa de X então $\bar{C}$ é conexo e $C \subset \bar{C} \Rightarrow C = \bar{C}$ e portanto C é fechado em X .

e) $X = \mathbb{R} \setminus 0 =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$



De fato, se $Y \subset X$ então Y é conexo de X .

ou $Y \subset C_1$ ou $Y \subset C_2$, ie,

ou $Y \cap C_1 = Y$ ou $Y \cap C_2 = Y$

Suponha que isto não valha.

Logo $\exists y_1 \in Y \cap C_1$ e $y_2 \in Y \cap C_2$

$$Y = (Y \cap C_1) \cup (Y \cap C_2)$$

ϕ $\times$ ϕ
 disjunta $\times$

$\Rightarrow Y$ é desconexo.

① : Tem um exercício em uma lista :

$A \subset \mathbb{Q}$, A contém dois pontos distintos $\Rightarrow A$ é desconexo.

• Se X é enumerável e se $C \subset X$ contém pelo menos dois pontos distintos então C é desconexo.

De fato, sejam $a, b \in C$, $a \neq b$.

Considere $f: C \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = d(x, a), \quad x \in C$$

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

$$\Rightarrow d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$$

Trocando $x \leftrightarrow y$ temos

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$$

Logo f é (uniformemente)
contínua em C .

$$\Rightarrow f(C) \text{ é convexo em } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow [f(a), f(b)] \subset f(C)$$

$$\text{mão enumerável} \rightarrow [0, d(a, b)] \subset f(C)$$

Logo $f(C)$ é não enumerável

$\Rightarrow C$ não é enumerável

$\Rightarrow X$ não é enumerável

X : localmente conexo

C : componente conexa de X

C é aberta em X : seja $x_0 \in C$.

Existe $V \subset X$ conexo, existe $\varepsilon > 0$:

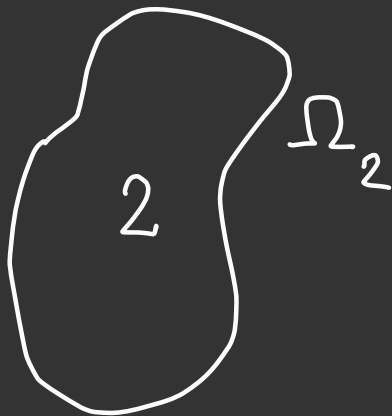
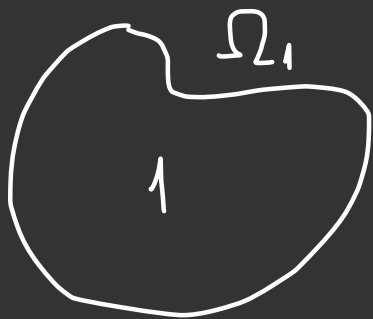
$$B_\varepsilon(x_0) \subset V,$$

Agora $x_0 \in V \cap C \Rightarrow V \cup C$
é conexo. Como C é componente

$$V \cup C = C, \text{ ie, } V \subset C.$$

Logo $B_\varepsilon(x_0) \subset C$. 

Exemplo: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$
diferenciável, $f'(x) = 0, \forall x \in \Omega$
Então f é constante em cada
componente conexa de Ω .



$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$