MAT0311/MAP0217 - 2o. Semestre de 2021

Lista extra de exercícios - 1

Definição. Sejam X um espaço métrico e $F \subset X$. Dizemos que F é *totalmente limitado* se dado $\varepsilon > 0$ existem $S_j \subset X$, $j = 1, \ldots, n$, tais que

$$(\sharp) \qquad F \subset \bigcup_{j=1}^{n} S_j, \quad \delta(S_j) < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n.$$

1. Mostre que $F \subset X$ é totalmente limitado se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existem $S_j \subset X$, $j = 1, \ldots, n$, cada S_j fechado em X, tal que vale $(\sharp)$.

2. Mostre que se $F \subset X$ é totalmente limitado então F é limitado.

3. Mostre que F é totalmente limitado e se $G \subset F$ então $\cancel{F}$ G é totalmente limitado.

4. Mostre que se d é a métrica discreta e se $F \subset X$ é infinito então F é limitado mas não totalmente limitado.

5. Sejam X um espaço métrico completo e $F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$ uma sequência de subconjuntos fechados em X, $F_n \neq \emptyset$, $\forall n$. Suponha que $\delta(F_n) \to 0$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$, para algum $x_0 \in X$.

6. Demonstre o seguinte teorema:

Teorema. *Seja X um espaço métrico. Então X é compacto se, e somente se, X é completo e totalmente limitado.*

Def. X esp. métrico, $F \subset X$

F é totalmente limitado

se dado $\varepsilon > 0$ existem

$S_1, \dots, S_m \subset X$, $\delta(S_j) < \varepsilon$

e $F \subset \bigcup_{j=1}^{m} S_j$.

(a) X compacto $\Rightarrow$ X é totalmente limitado.

De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então

$$X = \bigcup_{x \in X} B_{\varepsilon/3}(x)$$

Como X é compacto,
$\exists\, x_1, \dots, x_n \in X$:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/3}(x_i)$$

② F totalmente limitado
$\Rightarrow F$ é limitado

De fato existem $S_1, \dots, S_n$
$\subset X$, $\delta(S_j) < 1$ t.q.

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{n} S_j \qquad [S_j \neq \emptyset]$$

Sejam $x_j \in S_j$, $j = 1, \dots, n$

Se $x, y \in F$ existem

$i, k \in \{1, \dots, m\}$ t.q.

$x \in S_i$, $y \in S_k$.

$$d(x,y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y)$$

$$\leq d(x, x_i) + d(x_i, x_k) + d(x_k, y)$$

$$\leq 1 + 1 + d(x_j, x_k)$$

$$\leq 2 + M, \text{ onde}$$

$$M = \max_{1 \leq p,q \leq n} \{ d(x_p, x_q) \}$$

Logo F é limitado.

---

4 (X, d), d: discreta

$F \subset X$ totalmente limitado $\Rightarrow F$ finito

Existem $S_1, \dots, S_n$, $S_j \neq \emptyset$, $\forall j = 1, \dots, n$:

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{n} S_j \text{ e } \delta(S_j) < 1$$

$$\delta(S_j) < 1,\ S_j \neq \emptyset \Rightarrow S_j = \{x_j\}$$

Logo $F \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.

Para o aluno curioso

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} :\right.$$

$\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{\{x_n\},\ x_n \in \mathbb{R},\ \{x_n\}$ é limitada$\}$

$\ell_\infty(\mathbb{N})$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, com métrica definida por

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

$$|x_n - y_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

a) Mostre que d é uma métrica sobre $l_\infty(\mathbb{N})$

b) Mostre que, em $l_\infty(\mathbb{N})$, $B_1[0]$ não é totalmente limitada

Obs. Para cada $j \in \mathbb{N}$ defina $\vec{e}_j \in l_\infty(\mathbb{N})$:

$$\vec{e}_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots)$$

$$d(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = 1 \text{ se } j \neq k$$

---

5. X: completo

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \dots$$

fechados, $F_n \neq \emptyset \ \forall n$

$$\delta(F_n) \to 0$$

$$\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$$

Solução: Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $x_n \in F_n$.

Afirmação: $\{x_n\}$ é Cauchy

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $n \geqslant n_0 \Rightarrow \delta(F_n) < \varepsilon$

Se $m, n \geqslant n_0$ então $x_m \in F_m$ e $x_n \in F_n$

e $\therefore$ $x_m, x_n \in F_{\min\{m,n\}}$

Como $\min\{m, n\} \geqslant n_0$

$\delta(F_{\min\{m,n\}}) < \varepsilon$

e portanto $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Como X é completo,

$\exists x_0 \in X : x_n \xrightarrow{X} x_0$

Afirmação: $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

De fato, seja $\bar{m} \in \mathbb{N}$

arbitrário. Então

$\{x_n\}_{n \geq \bar{m}}$ é uma

sequência em $F_{\bar{n}}$

Como $x_n \xrightarrow[n \geq \bar{n}]{} x_0$

e como $F_{\bar{n}}$ é fechado

segue que $x_0 \in F_{\bar{n}}$

Logo $x_0 \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$.

Se $x_1 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ então

$d(x_1, x_0) \leq \delta(F_n), \forall n$

Como $\delta(F_n) \to 0$ segue

que $d(x_1, x_0) = 0$, ie, $x_1 = x_0$ $\blacksquare$

Dem. do Teorema

X completo, totalmente limitado $\Rightarrow X$ compacto

Suponha que a conclusão não valha.

$\exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, cada U_α aberto em X,

$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X$ mas

não existe subfamília finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cuja reunião seja $=$ a X.

Dado $\varepsilon = 1$ existem $S_1, \dots, S_N$ fechados em X, $\bigcup_{j=1}^{N} S_j = X$

e $\delta(S_j) < 1$

Existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que S_j não pode ser coberto por um nº finito dos $\{U_\alpha\}$. Defino

$$F_1 = S_j.$$

- F_1 é fechado em X, $\delta(F_1) < 1$, F_1 não pode ser coberto por um n.º finito dos $\{U_\alpha\}$

Agora F_1 é totalmente limitado. Dado $\varepsilon = 1/2$ existem $R_1, \dots, R_M$ fechados em X t.q.

$$F_1 \subset \bigcup_{k=1}^{M} R_k \text{ e } \delta(R_k) < \frac{1}{2}$$

para todo k.

$$F_1 = (R_1 \cap F_1) \cup \dots \cup (R_m \cap F_1)$$

Existe $l \in \{1, \dots, m\}$ t.q. $R_l \cap F_1$ não pode ser coberto por um nº finito dos $\{U_\alpha\}$

Ponho $F_2 = R_l \cap F_1$.

- $F_2 \subset F_1$, F_2 é fechado em

X, $\delta(F_2) < 1/2$ e

F_2 não pode ser coberto por um nº finito dos $\{U_\alpha\}$.

Continuando o processo obteremos uma sequência de fechados de X:

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$$

tal que

- $\delta(F_j) < 1/j$ $\Rightarrow F_j \neq \emptyset$ $j \geq 1$
- cada $\bar{F_j}$ não pode ser coberto por um nº finito dos $\{U_\alpha\}$

Como X é completo,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = \{x_0\}$$

Agora $x_0 \in U_{\alpha_0}$ para algum $\alpha_0 \in \Lambda$.

Como U_{α_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x_0) \subset U_{\alpha_0}$$

Existe $j_0 \in \mathbb{N} : 1/j_0 < \varepsilon$

Então $F_{j_0} \subset B_\varepsilon(x_0)$

pois se $x \in F_{j_0}$, como $x_0 \in F_{j_0}$, $d(x, x_0) \leq \delta(F_{j_0}) < 1/j_0 < \varepsilon$

Assim $F_{j_0} \subset U_{\alpha_0}$ ↯
