

Teorema da decomposição espectral para operadores simétricos

Teorema : $A \in L(\mathbb{R}^N)$ simétrico, ie

$$(Ax) \cdot y = x \cdot (Ay), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Então existe $\{u_1, \dots, u_N\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^N$, ie, $\{u_1, \dots, u_N\}$ é base de $\mathbb{R}^N$

e $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$, e existem $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ tais que

$$Au_j = \lambda_j u_j, \quad j = 1, \dots, N$$

Lembrar : λ_j são as raízes de

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Demonstração : A função $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (Ax) \cdot x$ é contínua.

Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ é a matriz de A com relação à base canônica de $\mathbb{R}^N$,

$\{e_1, \dots, e_N\}$, e se $x = \sum_{j=1}^N x_j e_j$ então

$$f(x) = (Ax) \cdot x = \sum_{j=1}^N a_{jj} x_j^2$$

OBS: $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, N$.

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$.

S é compacto. Seja $g(x) = |x|^2 - 1$.

g é contínua em $\mathbb{R}^N$ e

$$S = g^{-1}(\{0\}) \Rightarrow S \text{ é fechado em } \mathbb{R}^N$$

Também S é limitado.

Logo: existe $x_0 \in S$: $f(x_0) = \min_{x \in S} f(x)$

Note agora que g, f são de classe C^1
e que S é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^N$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^N : q(x) = 0\} \text{ e}$$

$q'(x)$ é representada por

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial q}{\partial x_N}(x) \right) = \vec{\nabla} q(x)$$

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_N^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} q(x) = (2x_1, \dots, 2x_N) = 2x$$

e $x \neq 0$ em S

Logo $f(x_0) = \min_S (f|_S)$ e portanto

x_0 é ponto crítico de $f|_S$. Logo, pelo Teorema da aula passada,

$$\vec{\nabla} f(x_0) = \lambda \vec{\nabla} q(x_0) = 2\lambda x_0$$



?

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_i x_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^N a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^N a_{ik} x_i$$

$$\stackrel{!}{=} 2 \sum_{j=1}^N a_{kj} x_j \quad (\text{A é simétrica})$$

$$\text{Logo } \vec{\nabla} f(x) = 2 \left(\sum_{j=1}^N a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj} x_j \right)$$

$$= 2 \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$= 2Ax$$

Conclusão: $2Ax_0 = 2\lambda x_0$

ou $Ax_0 = \lambda x_0$

ie, x_0 é autovetor de A correspondente ao autovalor λ !

Obs. x_0 é determinado por

$$(Ax_0).x_0 = \min_{|x|=1} (Ax).x$$

e como $Ax_0 = \lambda x_0$ então

$$(Ax_0).x_0 = (\lambda x_0).x_0 = \lambda(x_0.x_0) = \lambda \underbrace{|x_0|^2}_{=1}$$

e portanto $\lambda = (Ax_0).x_0$

Faço $u_1 = x_0$ $u_1.u_1 = 1$
 $\lambda_1 = \lambda$ $Au_1 = \lambda_1 u_1$

Seja $E = \{x \in \mathbb{R}^N : x.u_1 = 0\}$

$$\dim E = N-1$$

De fato $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

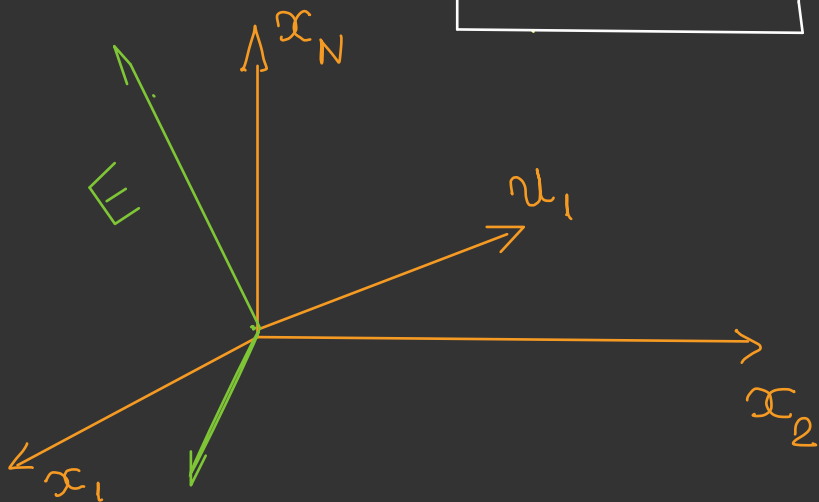
$$h(x) = x.u_1$$

h é sobrejetor. 1

$$\dim \ker h + \dim (\text{Imagem}(h)) = N$$

$$\dim E = \dim \ker h = N-1$$

Observações: $A(E) \subset E$



De fato se $x \in E$ então $x \cdot u_1 = 0$ e portanto

$$\begin{aligned} (Ax) \cdot u_1 &= x \cdot (Au_1) = x \cdot (\lambda_1 u_1) \\ &= \lambda_1 (x \cdot u_1) = 0, \text{ ie, } Ax \in E. \end{aligned}$$

Considero: $A|_E : E \longrightarrow E$
simétrica

Repeto o que foi feito: $\exists u_2 \in E$

com $u_2 \cdot u_2 = 1$ e $\exists \lambda_2 \in \mathbb{R}: Au_2 = \lambda_2 u_2$

Como $u_2 \in E$, $u_1 \cdot u_2 = 0$.

Repete-se o processo $N-2$ vezes $\square$