$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M} \subset \Omega$.

Dizemos que $\mathcal{M}$ é uma hipersuperfície de classe C^1 se $\exists\, g \in C^1(\Omega)$ tal que:

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}; \quad g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{M}$$

<u>Exemplo</u>: $\Omega = \mathbb{R}^N$, $g(x) = |x|^2 - r^2$,
onde $r > 0$

$$= x_1^2 + \dots + x_N^2 - r^2$$

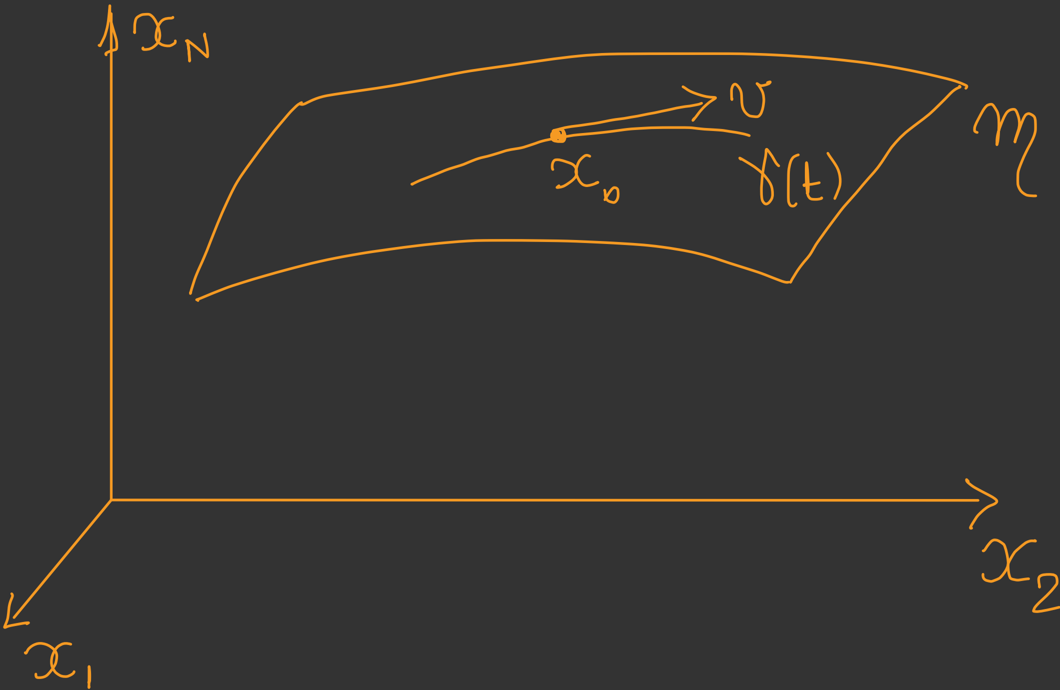
$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = r\}$$

$$g'(x) = [2x_1 \ 2x_2 \dots 2x_N]$$

se $x \in \mathcal{M}$ então $x \neq 0$ e $\therefore g'(x) \neq 0$

<u>Espaço tangente a $\mathcal{M}$ em</u> $x_0 \in \mathcal{M}$.

$T_{x_0}\mathcal{M} := \{ v \in \mathbb{R}^N : \exists\, \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 com $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(t) \in \mathcal{M}$, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ e $\gamma'(0) = v \}$



Fato: $T_{x_0}\mathcal{M}$ é um espaço vetorial de dimensão $N-1$.

Como consequência do teorema da função implícita, existe $U \subset \Omega$ aberto, $x_0 \in U$, tal que:

$$\mathcal{M} \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\} =$$

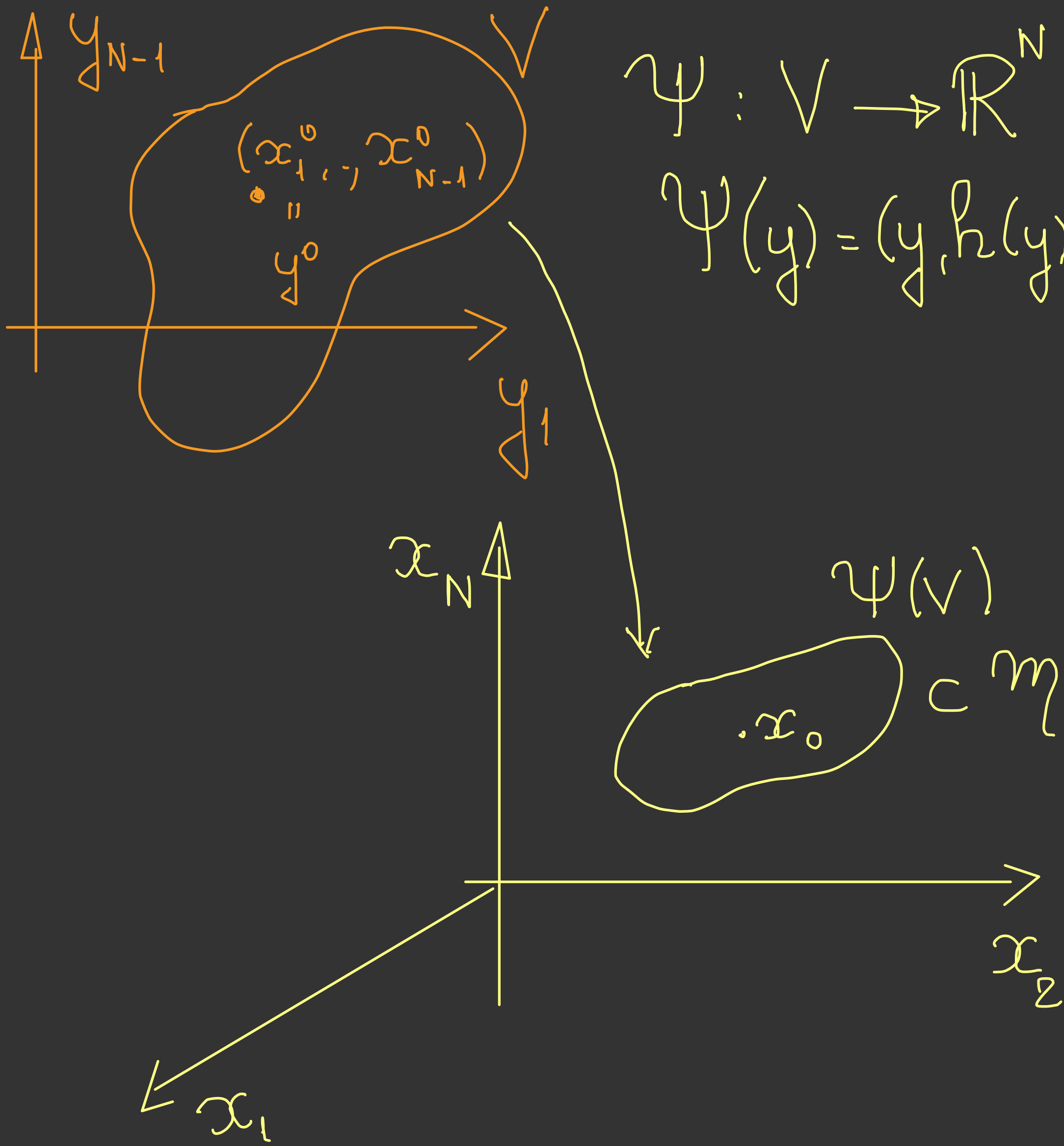
$$\{(y, h(y)) : y \in V\} \qquad y = (y_1, \dots, y_{N-1})$$

onde $V \subset \mathbb{R}^{N-1}$ é aberto, $(x_1^0, \dots, x_{N-1}^0) \in V$ e $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1$ e

$$x_N^0 = h(x_1^0, \dots, x_{N-1}^0)$$

$$\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\psi(y) = (y, h(y))$$



Considero as $N-1$ curvas parametrizadas em V: $\sigma_1(t) = y^0 + te_1, \ldots, \sigma_{N-1}(t) = y^0 + te_{N-1}$

$$\gamma_j(t) = \Psi(\sigma_j(t)), \quad j = 1, \ldots, N-1$$

$$\gamma_j(0) = \Psi(\sigma_j(0)) = \Psi(y^0) = x_0$$

$$\gamma_j'(0) = \Psi'(y^0)e_j \qquad j = 1, \ldots, N-1$$

$$\boxed{T_{x_0}\mathcal{M} = \{\Psi'(y^0)w : w \in \mathbb{R}^{N-1}\}}$$

$\in L(\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{R}^N)$ e é injetora.

<u>Observação</u>: Seja $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^N$ de classe C^1, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(t) \in \mathcal{M}$

para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Então $\gamma'(0) = v \in T_{x_0}\mathcal{M}$.

Logo $g(\gamma(t)) = 0$, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Derivando, $(\vec{\nabla} g)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Em particular

$$\boxed{(\vec{\nabla} g)(x_0) \cdot v = 0}$$

$$(\vec{\nabla} g)(x_0) \perp \underbrace{T_{x_0}\mathcal{M}}_{\text{dimensão } = N-1}$$

$\vec{\nabla} g(x_0)$ é normal a $\mathcal{M}$ em x_0

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $M \subset \Omega$ hipersuperfície de classe C^1, $f \in C^1(\Omega)$.

<u>Definição</u>: Dizemos que $x_0 \in M$ é <u>ponto</u> <u>crítico</u> de $f|_M$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\nabla} f(x_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0).$$

Note que a determinação de $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0)$ envolve

$$\begin{cases} g(x_0) = 0 & \text{1 equação} \\ \vec{\nabla} f(x_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0) & \text{N equações} \end{cases}$$

$(N+1)$-equações nas incógnitas $(x_1^0, \ldots, x_N^0, \lambda)$

Teorema: Suponha que $f|_{\mathcal{M}}$ assuma mínimo local em $x_0 \in \mathcal{M}$, isto é, que exista $r>0$ tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B_r(x_0) \cap \mathcal{M}$$

Então x_0 é ponto crítico de $f|_{\mathcal{M}}$.

Demonstração: Seja $v \in T_{x_0}\mathcal{M}$

Existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1, $\gamma(t) \in \mathcal{M}$, $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = v$.

Tome $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$|t| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(0)}_{= x_0}| < r$$

Em particular

$$f(\gamma(t)) \geq f(\gamma(0)), \quad |t| < \delta.$$

Logo $$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0$$

ie $$\vec{\nabla} f(\gamma(t)) . \gamma'(t) = 0 \text{ p/ } t = 0$$

$$\vec{\nabla} f(x_0) . v = 0.$$

Como v é arbitrário obtemos

$$\vec{\nabla} f(x_0) \perp T_{x_0} M$$

ie, $\vec{\nabla} f(x_0) \in [T_{x_0} M]^{\perp}$

gerado por

$\vec{\nabla} g(x_0)$ ▨

λ: multiplicador de Lagrange p/ f com relação a M em x_0.

<u>Exemplo</u>: Dada a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad 0 < b < a$$

determinar seus pontos mais próximos da origem.

<u>Solução</u>: $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \right\}$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} g(x,y) = \left(\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2} \right) \\ \vec{\nabla} g \neq 0 \text{ em } \mathcal{M} \end{cases}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{M}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

existe pois f é contínua e $\mathcal{M}$ é compacto

(x_0, y_0) é ponto crítico de $f|_{\mathcal{M}}$.

$$\begin{cases} g(x_0, y_0) = 0 \\ \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$(2x_0, 2y_0) = \lambda\left(2\frac{x_0}{a^2}, 2\frac{y_0}{b^2}\right)$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{a^2} x_0 \\ y_0 = \dfrac{\lambda}{b^2} y_0 \end{cases}$$

Note que ou $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$

Se $x_0 = 0$ então $\lambda = b^2$

$y_0 = \pm b \qquad (0, \pm b)$

Se $y_0 = 0$ então $(\pm a, 0)$

<u>Resposta</u>: $(0, \pm b)$ ▨