$A \in L(\mathbb{R}^N)$ é simétrica $\Leftrightarrow (Ax)\cdot y = x\cdot(Ay), \forall x,y \in \mathbb{R}^N$

$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$, A é simétrica $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

c/ rel. à base canônica

$\Leftrightarrow A = {}^tA$

$A \geq 0 \Leftrightarrow (Ax)\cdot x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$

$A > 0 \Leftrightarrow (Ax)\cdot x > 0$ se $x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\exists c > 0 : (Ax)\cdot x \geq c|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^N$

<u>Teorema</u>: $A \in L(\mathbb{R}^N)$ simétrica. Existe uma base $\{u_1, \dots, u_N\}$ de $\mathbb{R}^N$ ortonormal, ie, $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,\dots,N)$ e existem $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ t.q.

$$Au_j = \lambda_j u_j \quad j = 1,\dots,N$$

<u>Obs</u>: 1) $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são as raízes de

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

2) Se $x = \sum_{i=1}^{N} x_i u_i$, $y = \sum_{i=1}^{N} y_i u_i$

então

$$(Ax)\cdot y = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j y_j \,.$$

Em particular

$$(Ax)\cdot x = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_N x_N^2$$

$$A \geq 0 \iff \lambda_j \geq 0 \,,\ j = 1, \dots, N$$

$$A > 0 \iff \lambda_j > 0 \,,\ j = 1, \dots, N.$$

De volta à fórmula de Taylor de ordem 2

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$: $B_\delta(x_0) \subset \Omega$

$f \in C^2(\Omega)$. Então, para $h \in B_\delta(0)$,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k$$

$$+ R(h)$$

$$\boxed{\frac{R(h)}{|h|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0}$$

Lembrar: $f'(x_0)h = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)h_j$

$$H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\right)_{1 \leq j,k \leq N}$$

$\boxed{\text{matriz hessiana de } f \text{ em } x_0}$

$H_f(x_0)$ é uma matriz simétrica!

$$\Updownarrow$$

$H_f(x_0) \in L(\mathbb{R}^N)$ simétrica

Com esta notação podemos escrever:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}(H_f(x_0)h).h + R(h)$$

onde $\frac{R(h)}{|h|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

__Definição__: Seja $f \in C^1(\Omega)$. Dizemos que $x_0 \in \Omega$ é __ponto__ __crítico__ de f se

$$f'(x_0) = 0 \quad \left[\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \ j = 1, \dots, N\right]$$

Definição: Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e seja $x_0 \in \Omega$. Dizemos que:

(1) f assume mínimo local em x_0 se existe $r > 0$:
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

(2) f assume mínimo local estrito em x_0 se existe $r > 0$:
$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in \dot{B}_r(x_0).$$

Exemplos: $N = 2$, $f_1(x) = x_1^2$, $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2$

f_1: assume mínimo local em 0. (não estrito)

f_2: assume mínimo local estrito em 0

Teorema 1: Sejam $f \in C^1(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Se f assume mínimo local em x_0 então x_0 é <u>ponto crítico de</u> f.

Teorema 2: Sejam $f \in C^2(\Omega)$ e x_0 um ponto crítico de f. Se f assume mínimo local em x_0 então

$$H_f(x_0) \geq 0$$

Teorema 3: Seja $f \in C^2(\Omega)$. Suponha que x_0 seja um ponto crítico de f no qual

$$H_f(x_0) > 0.$$

Então f assume mínimo local estrito em x_0.

Dem. do teorema 1: Suponha que f assume mínimo local em x_0. Logo existe $r>0$ tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Fixo $h \in \mathbb{R}^N$, $|h|=1$ e defino

$$g(t) = f(x_0 + th), \quad |t| < r$$

$g(0) = f(x_0)$ e $\therefore$ $g(t) \geq g(0)$ para $t \in \,]-r, r[$.

Logo $g'(0) = 0$. Temos

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = D_h f(x_0) = f'(x_0)h$$

donde $f'(x_0)h = 0$. Como h é arbitrário, $f'(x_0) = 0$ $\blacksquare$

Demonstração do teorema 2: Suponha que $H_f(x_0)$ não seja positiva.

Então existe $h_0 \in \mathbb{R}^N$: $(H_f(x_0)h_0) \cdot h_0 < 0$

Podemos assumir que $|h_0| = 1$.

Temos $f'(x_0) = 0$. Pela fórmula de Taylor, tomando $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$, e tomando $t \in]-r, r[$ temos

$$f(x_0 + th_0) = f(x_0) + \frac{1}{2}\left(H_f(x_0)(th_0)\right) \cdot (th_0) + R(th_0)$$

onde $\frac{R(th_0)}{t^2} = \frac{R(th_0)}{|th_0|^2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \quad (*)$

Seja $c = \frac{1}{2}(H_f(x_0)h_0) \cdot h_0 < 0$

$$f(x_0+th_0)-f(x_0)=ct^2+R(th_0)$$

Dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$|t|<\delta \implies |R(th_0)|\leq \varepsilon t^2$$

Tomo $\varepsilon=-c/2$. Logo

$$\begin{aligned} f(x_0+th_0)-f(x_0) &= ct^2+R(th_0) \\ &\leq ct^2-\frac{c}{2}t^2 \\ &= \frac{ct^2}{2} \end{aligned}$$

para $|t|<\delta$.

Conclusão $f(x_0+th_0)-f(x_0)\leq \frac{ct^2}{2}$

$$<0$$

se $|t|<\delta,\ t\neq 0$

ie, $t\longmapsto f(x_0+th)$ assume máximo local estrito em 0.

Em particular x_0 não é ponto local estrito em x_0 $\boxed{/\!/}$

Demonstração do Teorema 3

$f \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ ponto crítico de f, $H_f(x_0) > 0$.

Temos: • $f'(x_0) = 0$

• Existe $c > 0$ tal que $(H_f(x_0)h) \cdot h \geq c|h|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^N$.

Tomo $r_0 > 0$: $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$. Temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}(H_f(x_0)h) \cdot h + R(h)$$

onde $\frac{R(h)}{|h|^2} \longrightarrow 0$. (*)

Existe $\bar{r} > 0$: $|h| < r \Longrightarrow |R(h)| \leq \dfrac{c|h|^2}{4}$

$0 < r \leq r_0$

Obtemos

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0) + \frac{1}{2} c|h|^2 - \frac{c|h|^2}{4}$$

$$= f(x_0) + \frac{c}{4}|h|^2, \quad |h| < r.$$

Logo $f(x_0 + h) > f(x_0)$, $h \in \dot{B}_r(0)$

$\blacksquare$