

$\mathbb{R}$: corpo ordenado completo

$\hookrightarrow$ satisfaz o axioma do supremo

Consequências

① $\forall y \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : m\epsilon > y$.

Em particular, dado $\epsilon > 0$ existe

$m_0 \in \mathbb{N} : m_0 \epsilon > 1$. Logo, se $m \geq m_0$

$m \in \mathbb{N}$, temos $m\epsilon \geq m_0 \epsilon > 1$, i.e.,

$$\frac{1}{m} < \epsilon, m \geq m_0.$$

$$\boxed{\frac{1}{m} \rightarrow 0}$$

② Dados $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$,
 $x < r < y$

Digressão: Em $\mathbb{N}$ vale o princípio

da indução: se $P \subset \mathbb{N}$ satisfaz

- $1 \in P$
 - Se $m \in P$ então $m+1 \in P$
- $$\} \Rightarrow P = \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow$ Princípio da boa ordem:

$\forall B \subset \mathbb{N}, B \neq \emptyset$ então B possui seu menor

elemento, ie, $\exists b \in B$ t.q. $b \leq m$,
para todo $m \in B$.

O princípio da boa ordem pode
ser enunciado em $\mathbb{Z}$:

$\forall P \subset \mathbb{Z}$, $P \neq \emptyset$ e limitado inferior-
mente então P tem menor elemento

De fato, existe q tal $q \leq p$,
 $\forall p \in P$. ($q \in \mathbb{Z}$). Seja

$$A = \{ p - q + 1 : p \in P \} \subset \mathbb{N}$$

$A \neq \emptyset$ pois $P \neq \emptyset$ e portanto

A tem menor elemento. Isto é,

$\exists a \in A$ tal que $a \leq m$, $\forall m \in A$.

Em outras palavras

$$a \leq p - q + 1, \forall p \in P$$

$$a + q - 1 \leq p, \forall p \in P$$

Ainda mais, $a = p_0 - q + 1$, para
algum $p_0 \in P$. Logo $p_0 \leq p, \forall p \in P$.

Tópicos sobre teoria dos conjuntos

Definição: Dados A, B conjuntos diremos que A é equivalente a B (ou que A tem a mesma cardinalidade de B), e escreveremos $A \sim B$, se existir $f: A \rightarrow B$ bijetora.

Observações:

- $A \sim A$
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Notação: Se $N \in \mathbb{N}$, denotamos

$$J_N := \{1, 2, \dots, N\}$$

Definição. Seja A um conjunto.

(1) Dizemos que A é finito se ou $A = \emptyset$ ou se $\exists N \in \mathbb{N}: A \sim J_N$.

(2) Dizemos que A é infinito se A não for finito.

(3) Dizemos que A é enumerável se ou A é finito ou $A \sim \mathbb{N}$.

Observação: Se $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ sobrejetora e se escrevermos $f(m) = x_m$ então $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$. Note então que

A é enumerável $\Leftrightarrow A$ se escreve na forma $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$

[isto é claro se A é infinito;
se A é finito (mãe razão)
 $A = \{a_1, \dots, a_N\} = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ onde,
por exemplo, $x_1 = a_1$ e $x_m = a_1$
 $\vdots$
 $x_N = a_N$ se $m > N$]

Observação 1: Se A é enumerável e se $g: A \rightarrow B$ é sobrejetora então B é enumerável. [$A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ então $B = \{g(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$]

Observação 2: Se A é enumerável e se $B \subset A$ então B é enumerável.

Dem: Se $B = \emptyset$ OK. Assuma $B \neq \emptyset$

Escrevamos $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ e tome $b \in B$. Tome $y_m, m \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:

$$y_m = \begin{cases} x_m & \text{se } x_m \in B \\ b & \text{se } x_m \notin B \end{cases}$$

Então $B = \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ $\square$

Exemplos: 1) $\mathbb{N}$ é enumerável

2) $\mathbb{Z}_+$ é enumerável

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+, \quad f(m) = m-1$$

bijeção

3) $\mathbb{Z}$ é enumerável

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad g(m) = \begin{cases} m/2 & \text{se } m \text{ é par} \\ -\frac{m-1}{2} & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases}$$

bijeção

Generalidades: I, Ω conjuntos, $I \neq \emptyset$

Família de subconjuntos de Ω indexada por i :

$$(E_i)_{i \in I}, E_i \subset \Omega.$$

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \{x \in \Omega : \exists i \in I \text{ c/ } x \in E_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{x \in \Omega : x \in E_i, \forall i \in I\}$$

Mais um conceito: sejam $E_1, \dots, E_N$ conjuntos. O produto cartesiano de $E_1, \dots, E_N$ é, por definição

$$E_1 \times \dots \times E_N = \{(e_1, \dots, e_N) : e_j \in E_j, j=1, \dots, N\}$$

Teorema: O conjunto

$$E \equiv \mathbb{Z}_+ \cup (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{N}) \cup \dots \cup (\mathbb{Z}_+^{N-1} \times \mathbb{N}) \cup \dots$$

é enumerável.

Dem. Seja $p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$
a sequência dos primos
Se $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$

$m = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ onde
 p_k é o maior fator primo

de m . Logo $m_j \in \mathbb{Z}_+^k$ e $m_j \geq 0$

Logo $(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^{k-1} \times \mathbb{N}$
 $\subset E$

Escrevemos

$1 = 2^0$ e neste caso $m_1 = 0 \in \mathbb{E}$

Definimos $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ por

$$f(m) = (m_1, \dots, m_k)$$

f é uma bijecção, por
construção [7]

Observação: $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{N}^N \subset \mathbb{E}$

e portanto $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{N}^N$ é enumerável

Corolário: $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Dem. Considere

$$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$$

A é enumerável. Seja

$$g: A \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$g(p, q, 1) = p/q \in \mathbb{Q}$$

$$g(p, q, 2) = -p/q \in \mathbb{Q}$$

$$g(p, q, 3) = 0$$

$\forall p, q \in \mathbb{N}$. g é sobrejetora!

Portanto $\mathbb{Q}$ é enumerável. $\square$

Proposição: Seja $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de conjuntos. Se cada A_m ($m = 1, 2, \dots$) for enumerável então $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é enumerável.

Demonstrações: Cada A_m
pode ser escrito na forma
$$A_m = \{ x_m^{(n)} : n \in \mathbb{N} \}$$

Considere $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$

$$(n, m) \mapsto x_m^{(n)}$$

λ é sobrejetora e como
 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável segue
que $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ é enumerável $\square$

Exemplo de um conjunto
não enumerável:

$$\mathcal{I} = \left\{ (x_m)_{m \in \mathbb{N}} : x_m \in \{0, 1\}, \forall m \right\}$$

Proposição: $\mathcal{I}$ não é enumerável.

Dem. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}$ qualquer. Vamos mostrar que f não pode ser sobrejetora, exibindo um elemento em $\mathcal{I}$ que não está na imagem de f . Tal elemento é definido por $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ onde:

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{se o } n\text{-ésimo} \\ & \text{elemento da sequência} \\ & f(n) \text{ for } 1 \\ \\ 1 & \text{se o } n\text{-ésimo} \\ & \text{elemento da sequência} \\ & f(n) \text{ for } 0 \end{cases}$$

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Imagem } f.$

$$f(1) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots)$$

$$f(2) = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots)$$

$$\vdots$$

