

Teorema da função implícita

Notação $\mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$

Coordenadas $(x, y) = (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M)$

Exemplos: Considere um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N + b_{11}y_1 + \dots + b_{1M}y_M = c_1 \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \dots + a_{NN}x_N + b_{N1}y_1 + \dots + b_{NM}y_M = c_N \end{cases}$$

N equações, $N+M$ incógnitas

Se $\det(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}} \neq 0$ { podemos resolver
na variável x .

Considere agora um sistema não linear:

$$(5) \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = 0 \\ \vdots \\ f_N(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = 0 \end{cases}$$

Quero resolver (S) obtendo $x_1, \dots, x_N$ como funções de $y_1, \dots, y_M$. Precisamos:

(1) f_j de classe C^1 , $j=1, \dots, N$.

(2) Uma solução particular:

existem $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_M$ t.q.

$$f_j(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_M) = 0 \quad j=1, \dots, N$$

$$(3) \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a, b) \right)_{1 \leq i, j \leq N} \neq 0$$

$$\mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M, \quad A \in L(\mathbb{R}^{N+M}, \mathbb{R}^N)$$

Se $(h, k) \in \mathbb{R}^{N+M}$

$$A(h, k) = A(h, 0) + A(0, k)$$

$$A_x \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); \quad A_x h = A(h, 0)$$

$$A_y \in L(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N); \quad A_y k = A(0, k)$$

Então $A(h, k) = A_x h + A_y k$.

Proposição: Suponha $A_x \in GL(\mathbb{R}^N)$

Então dado $k \in \mathbb{R}^M$ existe um único $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $A(h, k) = 0$

Demonstração: Dado $k \in \mathbb{R}^M$

temos que resolver $A(h, k) = 0$.

Mas $A(h, k) = A_x h + A_y k = 0$, ie

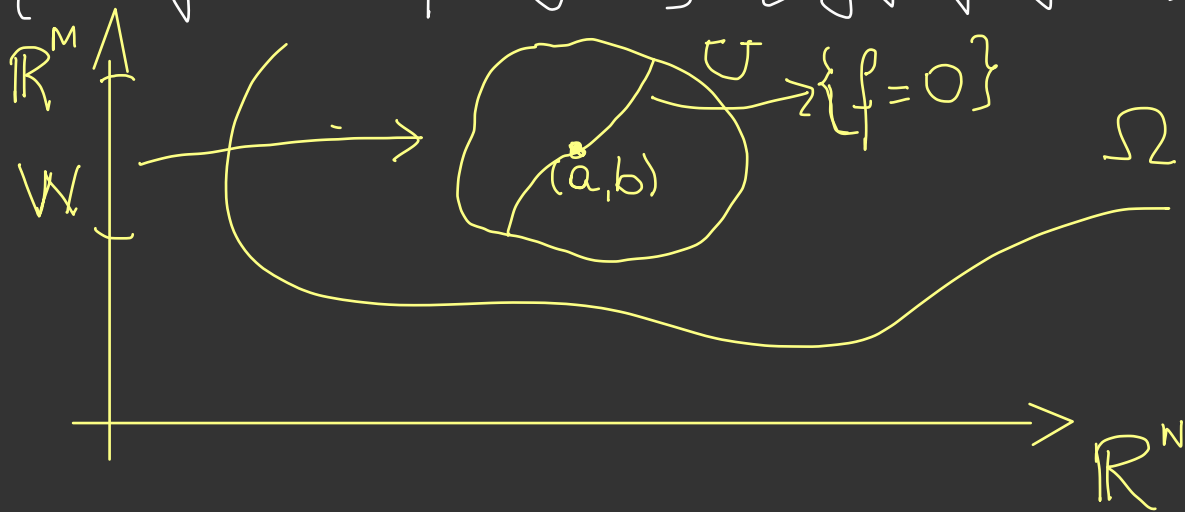
$$A_x h = -A_y k \quad \text{ou} \quad h = -A_x^{-1} A_y k$$

Teorema da função implícita

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$ aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 . Seja $(a, b) \in \Omega$ tal que $f(a, b) = 0$ e que, se $A = f'(a, b)$ então $A_x \in GL(\mathbb{R}^N)$. Então:

- (1) Existe $U \subset \Omega$ aberto, $(a, b) \in U$;
 (2) $W \subset \mathbb{R}^M$ aberto, $b \in W$;
 (3) $g: W \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 , $g(b) = a$
 Tais que:

$$\{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\} = \{(g(y), y) : y \in W\}$$



Demonstração: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Seja
 $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N+M}$, $F(x, y) = (f(x, y), y)$
 F é de classe C^1 , $F(a, b) = (0, b)$

Afirmo que $F'(a,b) \in GL(\mathbb{R}^{N+M})$

De fato,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + A(h,k) + r(h,k)$$

$$\text{onde } \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

Logo:

$$F(a+h, b+k) - F(a,b) =$$

$$(f(a+h, b+k), b+k) - (0, b) =$$

$$= (A(h,k) + r(h,k), k) =$$

$$= (A(h,k), k) + (r(h,k), 0)$$

Conclusão $F'(a,b)$ é a transformação linear dada por:

$$(h,k) \xrightarrow{T} (A(h,k), k).$$

T é injetora: se $T(h,k) = 0$ então

$A(h, k) = 0$ e $k = 0$. Logo $\underbrace{A(h, 0) = 0}_{A_x!}$
ie $A_x h = 0$
Como A_x é invertível, $h = 0$ $\square$

Podemos aplicar o Teorema da função inversa para F :

existem:

- $(a, b) \in U \subset \Omega$ aberto;
- $(0, b) \in V \subset \mathbb{R}^{N+M}$ aberto

tais que $F: U \rightarrow V$ é uma bijeção com inversa de classe C^1

Seja G a inversa de F . Denotarei, provisoriamente, as variáveis em V por (X, Y) . Escreverei, também,

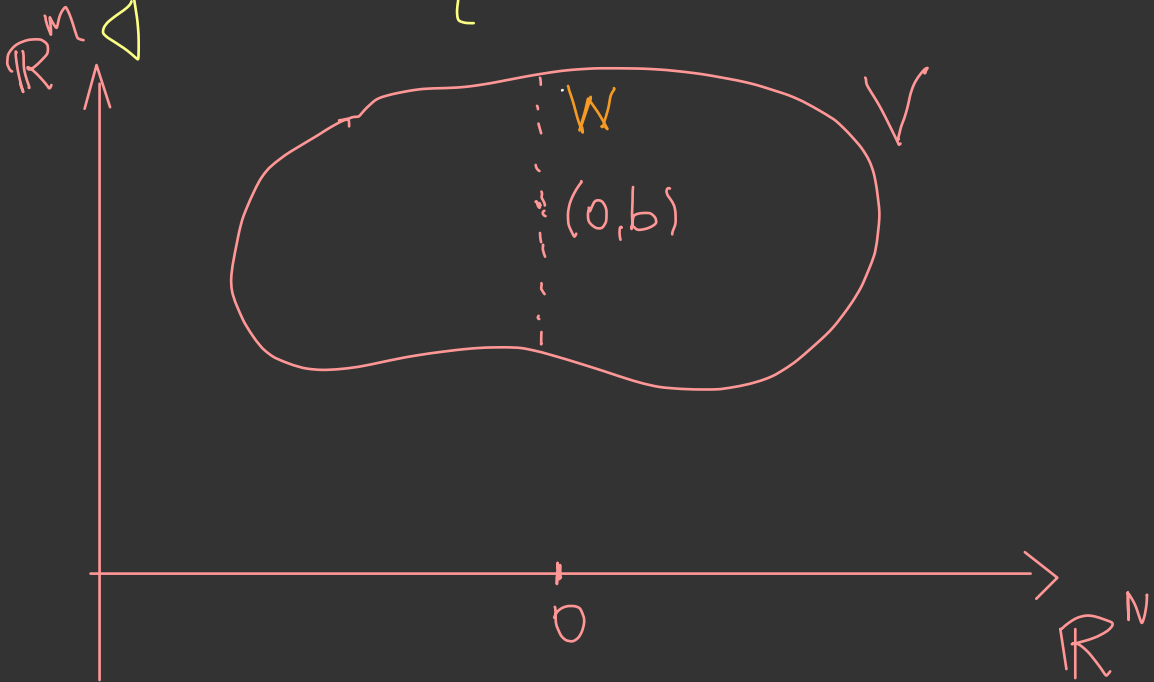
$$G(X, Y) = (G_1(X, Y), G_2(X, Y))$$

Então, dado que $F(x, y) = (f(x, y), y)$,

$$F(G(X, Y)) = (f(G_1(X, Y), G_2(X, Y)), G_2(X, Y))$$

Assim
$$\begin{cases} f(G_1(X, Y), G_2(X, Y)) = X \\ G_2(X, Y) = Y \end{cases}$$

Seja $W = \{Y \in \mathbb{R}^N : (0, Y) \in V\}$



Note que $b \in W$ e que W é aberto em $\mathbb{R}^M$. [se

$$\phi: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^{N+M}, \quad \phi(Y) = (0, Y),$$

$$\text{então } W = \phi^{-1}(V)]$$

$$\boxed{G = F^{-1}}$$

$$\begin{cases} f(G_1(X, Y), Y) = X \\ G_2(X, Y) = Y \end{cases}$$

$$G(0, b) = (a, b)$$

Definimos $g: W \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$g(Y) \doteq G_1(0, Y)$$

$$\text{Teremos } g(b) = G_1(0, b) = a !$$

$$f(g(Y), Y) = 0$$

$$\text{Logo } \{(g(Y), Y) : Y \in W\} \subset$$

$$\{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$$

A inclusão reversa segue de

$$G \circ F = I \text{ em } U, \text{ ie,}$$

$$G(F(x, y)) = (x, y), \text{ ie,}$$

$$(G_1(f(x, y), y), y) = (x, y), \text{ ie,}$$

$$G_1(f(x, y), y) = x.$$

Logo, se $f(x, y) = 0$ temos

$$x = G_1(0, y) = g(y)$$

e portanto vale a inclusão reversa $\square$

Observação: Em geral não é possível obter g explicitamente, mas

podemos determinar $g'(b) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\text{De fato } g'(b) = -A_x^{-1} A_y$$

Dem. $G(X, Y) = (G_1(X, Y), Y)$

$$\text{Logo } G(0, y) = (g(y), y)$$

$$\Phi(y) \doteq (g(y), y).$$

Teremos, como acima,

$$\Phi'(y)k = (g'(y)k, k)$$

$$\text{Teremos } f(\Phi(y)) = 0$$

Pela regra da cadeia

$$0 = f'(\Phi(y)) \cdot \Phi'(y)$$

$$\text{Faço } y = b. \text{ Temos } \Phi(b) = (a, b),$$

donde, se $k \in \mathbb{R}^M$

$$0 = (f'(a,b) \circ \Phi'(y))k$$

$$= f'(a,b)(\Phi'(b)k)$$

$$= f'(a,b)(g'(b)k, k)$$

$$= A(g'(b)k, k)$$

$$= A_x(g'(b)k) + A_y k$$

Conclusão

$$A_x g'(b) + A_y = 0$$

$$\therefore g'(b) = -A_x^{-1} A_y \quad \square$$