

Demonstração do Teorema da Função Inversa
 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $x_0 \in \Omega$ t.q.
 $f'(x_0) \in GL(\mathbb{R}^N)$. Então $\exists V \subset \Omega$, $x_0 \in V$
tal que $f(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^N$ e
 $f|_V: V \rightarrow f(V)$ é uma bijecção com
inversa de classe C^1

(*) Vamos assumir que $x_0 = 0$ e
que $f(0) = 0$. De fato, considere
 $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$
 $g \in C^1$, $g(0) = 0$
Se definirmos $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,
 $S: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$:
 $T(x) = x + x_0$
 $S(y) = y - f(x_0)$, então

$g = S \circ (f \circ T)$. Basta notar que T e S são de classe C^1 com inversa de classe C^1 .

$$f = S^{-1} \circ g \circ T^{-1} \quad \square$$

$f(0) = 0$. Escrevemos

$$f(0+x) = f(0) + f'(0)x + r(x), \text{ ie}$$

$$\text{ie, } f(x) = f'(0)x + r(x)$$

Lembrar da aula passada:

$U \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$

$f(x) = Tx + \phi(x)$, onde $T \in GL(\mathbb{R}^N)$

e $|\phi(x) - \phi(y)| \leq c|x-y|$, $\forall x, y \in U$

com $\|T^{-1}\| \cdot c < 1$. Então $f(U)$ é

aberto em $\mathbb{R}^N$ e $f: U \rightarrow f(U)$ é

uma bijecção com inversa contínua.

$f(x) = f'(0)x + r(x)$. Note que $r \in C^1$ pois f é de classe C^1 . Além do mais

$$r(x) = 0 + 0x + r(x)$$

Como $r(x)/|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ temos

$r'(0) = 0$. Como r é classe C^1

dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - 0| \leq \delta \Rightarrow \|r'(x) - \underbrace{r'(0)}_0\| \leq \varepsilon$$

Tomo $\varepsilon = \|f'(0)^{-1}\|^{-1}/2$ e considero
 $\delta > 0$ correspondente. Então

$$|x| \leq \delta \Rightarrow \|r'(x)\| \leq \|f'(0)^{-1}\|^{-1}/2$$

Agora $B_\delta(0)$ é convexa. Pelo

DVM obtemos

$$\boxed{x, y \in B_\delta(0) \Rightarrow |r(x) - r(y)| \leq (\|f'(0)^{-1}\|^{-1}/2) |x - y|}$$

$$\|f'(0)^{-1}\| \cdot \overbrace{C} = \frac{1}{2} < 1$$

Agora, $f'(0) \in GL(\mathbb{R}^N) \subset L(\mathbb{R}^N)$
aberto em $\nearrow$

Logo $\exists \rho > 0$ tal se $T \in L(\mathbb{R}^N)$
e $\|T - f'(0)\| < \rho \Rightarrow T \in GL(\mathbb{R}^N)$.

Como f' é contínua em 0,
existe $\eta > 0$:

$$|x| \leq \eta \Rightarrow \|f'(x) - f'(0)\| < \rho$$

Conclusão: $\exists \eta > 0$ t.q.

$$|x| \leq \eta \Rightarrow f'(x) \in GL(\mathbb{R}^N)$$

Finalmente tome $\delta = \min\{\eta, \delta\}$

e $V = B_\delta(0)$. Resumindo:

$$(1) |r(x) - r(y)| \leq \frac{\|f'(0)^{-1}\|^{-1}}{2} |x - y|,$$

$$\forall x, y \in V$$

$$(2) f'(x) \in GL(\mathbb{R}^n), \forall x \in V$$

(1) implica, pelo resultado da aula passada, que $f(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e que

$f|_V : V \rightarrow f(V)$ é uma bijeção com inversa contínua.

Falta mostrar que $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ é continuamente diferenciável em $f(V)$. Fixemos

$$y \in f(V), \quad f(x) = y.$$

Vamos, primeiramente, mostrar que f^{-1} é diferenciável em y .

$$f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + Tk + R(k)$$

onde $T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{R(k)}{|k|} \xrightarrow{|k| \rightarrow 0} 0$

Se $(f^{-1})'(y)$ existir

usando (2)

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

Pela regra da cadeia

$$I = f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$$

$$f^{-1}(y+k) = f^{-1}(y) + f'(x)^{-1}k + R(k)$$

$$\frac{R(k)}{|k|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

$$y = f(x), \quad y + k = f(x+h) \quad (\text{define } h)$$

$$\longrightarrow k = f(x+h) - f(x)$$

$$x+h = f^{-1}(y+k)$$

$$\longrightarrow h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$$

Como f e f^{-1} são contínuas,

$$h \rightarrow 0 \iff k \rightarrow 0$$

$$R(k) = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - f'(x)^{-1}k$$

$$= h - f'(x)^{-1}k$$

$$= h - f'(x)^{-1} [f(x+h) - f(x)]$$

$$= h - f'(x)^{-1} [f'(x)h + r(h)]$$

onde $\frac{\pi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Assim

$$R(k) = h - f'(x)^{-1} f'(x) h - f'(x)^{-1} \pi(h)$$

ie, $R(k) = - f'(x)^{-1} \pi(h)$

Logo $\frac{R(k)}{|k|} = - \frac{|h|}{|k|} f'(x)^{-1} \frac{\pi(h)}{|h|}$

e portanto

$$\frac{|R(k)|}{|k|} = \frac{|h|}{|k|} \left| f'(x)^{-1} \frac{\pi(h)}{|h|} \right|$$

$$\leq \frac{|h|}{|k|} \|f'(x)^{-1}\| \frac{|\pi(h)|}{|h|}$$

Se $k \rightarrow 0$ então $h \rightarrow 0$ e portanto

$$\frac{|\pi(h)|}{|h|} \rightarrow 0. \text{ Precisamos verificar}$$

que $\frac{|h|}{|k|}$ fica limitado quando

$h, k \rightarrow 0$. Aplico exercício 6 da lista 5: existe $c > 0$:

$$|f(x+h) - f(x)| \geq c|h|,$$

para $|h| < \delta$. Logo $|k| \geq c|h|$

$$\text{e } \therefore \frac{|h|}{|k|} \leq c \quad \square$$

Finalmente devemos verificar
que $(f^{-1})': f(V) \rightarrow L(\mathbb{R}^N)$
é contínua:

$$(f^{-1})^1 = (f^1)^{-1} \circ f^{-1} \quad \text{ie,}$$

$$\begin{array}{ccc} f(V) & \xrightarrow{f^{-1}} & V \xrightarrow{f^1} GL(\mathbb{R}^N) \\ & \searrow (f^{-1})^1 & \downarrow \lambda \\ & & GL(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

$$\lambda(A) = A^{-1} \quad (\text{continuous}) \quad \square$$