

1) Contrações : Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos e $\varphi: X \rightarrow Y$.

Dizemos que φ é uma contração se existir $0 \leq c < 1$ tal que

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c d_X(x, y), \forall x, y \in X$$

Obs: Toda contração é uniformemente contínua.

2) Teorema do ponto fixo de Banach

Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\varphi: X \rightarrow X$ uma

contração. Então $\exists! \bar{x} \in X$ tal que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$. Além disto,

dado $x_0 \in X$ arbitrário e definindo,

por indução $x_{m+1} = \varphi(x_m)$,

$n \geq 0$, então $x_n \xrightarrow{X} \bar{x}$.

Demonstração: Unicidade. Suponha
que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$, $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$. Então
 $\bar{x} = \bar{y}$ pois

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &= d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) \\ &\leq c d(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \underbrace{(1-c)}_{>0} d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$$

$$\Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \text{ i.e., } \bar{x} = \bar{y}.$$

Existência: Enunciemos antes um
resultado auxiliar:

Lema: Sejam (X, d) um espaço mé-
trico e $\{x_n\}$ uma sequência em X
satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(x_{j+1}, x_j) < \infty$$

Então $\{x_n\}$ é sequência de Cauchy

Demonstração : exercício

Tomemos $x_0 \in X$ e formemos
 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Então

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \\ \leq c d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq c^n d(x_1, x_0)$$

Como $0 \leq c < 1$ temos $\sum_{n=0}^{\infty} c^n < \infty$
e portanto $\{x_n\}$ é Cauchy.

Como X é completo existe

$$\bar{x} \in X : x_n \xrightarrow{X} \bar{x}$$

Como φ é contínua

$$\varphi(x_n) \xrightarrow{X} \varphi(\bar{x})$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ x_{n+1} & \xrightarrow{X} & \bar{x} \end{array} \quad \leftarrow$$

Conclusão.

