

Teorema: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. São equiva-
lentes:

A) Ω é conexo;

B) $\forall x, y \in \Omega \exists \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$
contínua, $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$

Vimos que $A) \Rightarrow B)$

$B) \Rightarrow A)$ Suponha Ω desconexo

Então $\exists U_1, U_2 \subset \Omega$ abertos em Ω ,

com $U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e

$U_1 \cup U_2 = \Omega$. Podemos tomar $x \in U_1,$

$y \in U_2$. Por B) $\exists \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$

contínua, $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. Consi-

dere $E \doteq \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$

$E \subset \Omega$. Como $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é conexo
e como γ é contínua, E é conexo.

Mas, se definirmos $V_1 = U_1 \cap E$,
 $V_2 = U_2 \cap E$ temos

V_1 e V_2 são abertos de E ;

$V_1 \neq \emptyset$ pois $x \in V_1$,

$V_2 \neq \emptyset$ pois $y \in V_2$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

$$V_1 \cup V_2 = E$$

$\Rightarrow$
 E
é
descon-
exo
! 

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, convexo, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ dif.

$$\|f'(x)\| \leq M, \forall x \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in D$$

Corolário da DVM: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto,
convexo. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável.
Se $f'(x) = 0, \forall x \in \Omega$ então f é
constante em Ω .

Demonstração: Seja $x_0 \in \Omega$ fixado
e seja

$$F = \{x \in \Omega : f(x) = f(x_0)\}$$

Nessa conclusão é que $F = \Omega$

Vamos mostrar que $F \neq \emptyset$, F
é aberto em Ω e F é fechado.
(o que implicará $F = \Omega$)

i) $x_0 \in F$ e $\therefore F \neq \emptyset$

ii) Como f é diferenciável em Ω
então f é contínua em Ω .

$$\text{Como } F = f^{-1}(\underbrace{\{f(x_0)\}}_{\text{fechado em } \mathbb{R}^M})$$

segue que F é fechado em Ω .

iii) F é aberto em Ω . De fato
seja $x_* \in F$ arbitrário. Tome
mos $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x_*) \subset \Omega$.

$\underbrace{\varepsilon}_{\text{conveniente}}$

Aplicamos a DVM para

$$f|_{B_\varepsilon(x_*)}: B_\varepsilon(x_*) \rightarrow \mathbb{R}^M.$$

Como $\|f'(x)\| \leq 0$, $\forall x \in B_\varepsilon(x_*)$.

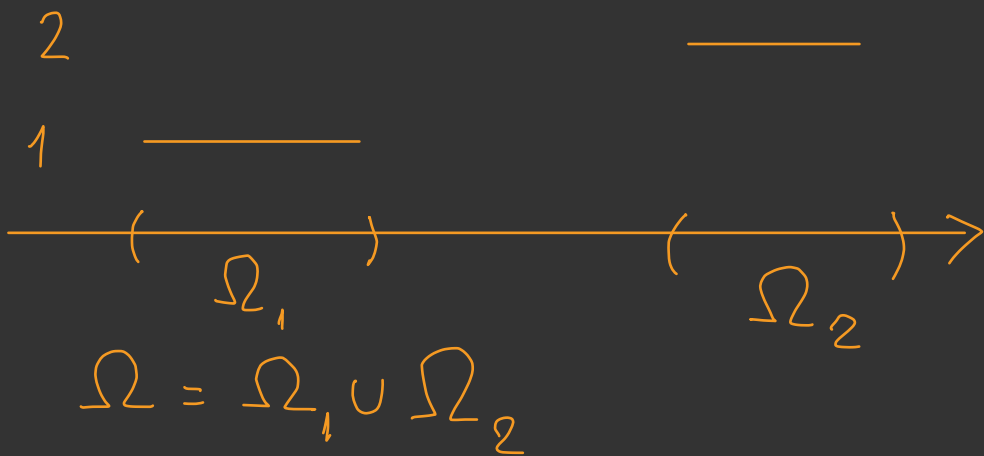
obtemos $|f(y) - f(x_*)| \leq 0|y - x_*|$

para todo $y \in B_\varepsilon(x_*)$, ie,

$$f(y) = f(x_*), \forall y \in B_\varepsilon(x_*).$$

Mas $f(x_*) = f(x_0)$ ($x_* \in E$)

donde $B_\varepsilon(x_*) \subset E$ $\square$



Definição: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$. Dizemos que f é continuamente diferenciável em Ω se:

(1) f é diferenciável em Ω ;

(2) A função $f': \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ é contínua em Ω .

Note que (2) significa, explicitamente:

Dado $x_0 \in \Omega$ e dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in \Omega, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \varepsilon$$

$C^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$ [espaço das funções $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ que são continuamente diferenciáveis.

Teorema: Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto. Escreva $f = (f_1, \dots, f_M)$. São equivalentes:

(1) $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$

(2) $\partial f_i / \partial x_j$ existem e são con-

funções em Ω , $i=1, \dots, M$,
 $j=1, \dots, N$.

Demonstração

(1) $\Rightarrow$ (2). $\{e_1, \dots, e_N\}, \{u_1, \dots, u_M\}$
bases canônicas de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$ respec-
tivamente. Então, se $x \in \Omega$,
como f é diferenciável,

$$\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)}_{\text{existem}} = (f'(x)e_j) \cdot u_i$$

existem

Se $x, x_0 \in \Omega$,

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right| = \left| (f'(x)e_j) \cdot u_i - (f'(x_0)e_j) \cdot u_i \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= |(f'(x)e_j - f'(x_0)e_j) \cdot u_i| \\
 &\stackrel{\text{CS}}{\leq} |f'(x)e_j - f'(x_0)e_j| \underbrace{|u_i|}_{=1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |(f'(x) - f'(x_0))e_j| \\
 &\leq \|f'(x) - f'(x_0)\| \underbrace{|e_j|}_{=1}
 \end{aligned}$$

Conclusão : se $x, x_0 \in \Omega$,

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \|f'(x) - f'(x_0)\|$$

$\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas em $x_0 \in \Omega$.

(2) $\Rightarrow$ (1) (1º caso) $M = 1$.

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Seja $x_0 \in \Omega$. Vamos primeiramente mostrar que f é diferenciável em x_0 .

Já temos a candidata à $f'(x_0)$: $h \mapsto \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j$

Definimos

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j$$

e vamos mostrar que $\frac{|r(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
isto é :

Dado $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \Rightarrow |\pi(h)| \leq \varepsilon |h|$$

[estamos assumindo $B_\pi(x_0) \subset \Omega$
e que $\delta < \pi$]

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$, $\delta < \pi$:

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0+h) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

para todo $j=1, \dots, N$.

Fixemos h , $|h| < \delta$, e formemos

$$\left[\begin{array}{l} v_0 = 0 \\ v_1 = h_1 e_1 \\ v_2 = h_1 e_1 + h_2 e_2 \\ \vdots \\ v_j = \sum_{k=1}^j h_k e_k \end{array} \right. , \quad j=1, \dots, N$$

Note que $v_N = h$.

Note também que $|v_j| \leq |h|, \forall j=1, \dots, N$.

Teremos

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f(x_0 + v_N) - f(x_0 + v_0) \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ f(x_0 + v_j) - f(x_0 + v_{j-1}) \right\} \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} f(x_0 + v_j) - f(x_0 + v_{j-1}) &= \\ f(x_0 + v_{j-1} + h_j e_j) - f(x_0 + v_{j-1}) &= \\ x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0N}) \end{aligned}$$

$$x_0 + v_j = (x_{01}, \dots, x_{0N}) + (h_1, \dots, h_j, 0, \dots, 0)$$

$$x_0 + v_{j-1} = (x_{01}, \dots, x_{0N}) + (h_1, \dots, h_{j-1}, 0, \dots, 0)$$

Então

$$f(x_0 + v_j) - f(x_0 + v_{j-1}) =$$

$$f(x_{01} + h_1, \dots, x_{0j-1} + h_{j-1}, x_{0j} + h_j, x_{0j+1}, \dots, x_{0N}) \\ - f(x_{01} + h_1, \dots, x_{0j-1} + h_{j-1}, x_{0j}, x_{0j+1}, \dots, x_{0N})$$

Seja $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x_{01} + h_1, \dots, x_{0j-1} + h_{j-1}, x_{0j} + th_j, x_{0j+1}, \dots, x_{0N})$$

$$f(x_0 + v_j) - f(x_0 + v_{j-1}) = g(1) - g(0)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe e é contínua, segue

que g é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$. Logo, pelo TVM em $\mathbb{R}$, $g(1) - g(0) = g'(\theta)$, para algum $\theta \in]0, 1[$. Portanto

$$\begin{aligned}
 g'(\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{01}+h_{11}, \dots, x_{0j-1}+h_{j-1}, x_{0j}+\theta h_j, x_{0j+1}, \dots) h_j \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + v_{j-1} + \theta h_j e_j) h_j.
 \end{aligned}$$

Conclusão

$$f(x_0 + v_j) - f(x_0 + v_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + v_{j-1} + \theta h_j e_j) h_j$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 r(h) &= f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j \\
 &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + v_{j-1} + \theta h_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right\} h_j
 \end{aligned}$$

Se $|h| < \delta$ então, para todo $j=1, \dots, N$

temos $|v_{j-1} + \theta h_j e_j| < \delta$. De fato

$$|v_{j-1} + \theta h_j e_j| = |(h_1, \dots, h_{j-1}, \theta h_j, 0, \dots, 0)|$$

$$= \{ h_1^2 + \dots + h_{j-1}^2 + \theta^2 h_j^2 \}^{1/2}$$

$$< \{ h_1^2 + \dots + h_j^2 \}^{1/2} \leq |h|$$

donde

$$|\pi(h)| \leq \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + v_{j-1} + \theta e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right| |h_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{N} |h_j| \leq \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{N} |h| = \varepsilon |h|$$

Conclusão: f é diferenciável em x_0 .

LEMBRAR: Se $A \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e

se $\{a_{ij}\}$ é a matriz de A

com relação às bases canônicas então $\|A\| \leq \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2}$

$[A \mapsto \{a_{ij}\}]$ é linear

Voltando ao caso $M=1$, já sabemos que f é diferenciável.

Agora se $x, x_0 \in \Omega$,

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \left\{ \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right)^2 \right\}^{1/2}$$
$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right\}_{1 \leq j \leq N} = q$$

Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ como acima: se $|x - x_0| < \delta$ então

$$q \leq \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon^2}{N^2} \right\}^{1/2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}$$

Logo f' é contínua em x_0 .

(2) $\Rightarrow$ (1) caso geral. Escrevamos $f = (f_1, \dots, f_N)$.

Como $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existem e são contínuas

em Ω segue, pelo caso anterior,
que cada f_i é diferenciável
em $\Omega \Rightarrow f$ é diferenciável

em Ω . Novamente, se $x, x_0 \in \Omega$

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Logo $f': \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ é
contínua $\square$
